Übungen zu Mechanik II	**Blatt Nr. 04**

Aufgabe 1: Ein symmetrischer Kreisel kann als voller Kegel mit dem maximalen Radius R, der Höhe h, und einer homogenen Massendichte μ betrachtet werden.

(a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente bzgl. des Schwerpunkts des Kegels.

(b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente für den Fall, dass die Spitze des Kegels als Unterstützungspunkt dient und am Boden befestigt worden ist.

[Hinweis: Sie dürfen sich in einem der Fälle des Steinerschen Satzes bedienen.]

Aufgabe 2: Die Lagrange-Funktion eines freien starren Körpers kann in Euler-Winkeln als

$$L = \frac{1}{2}\Big\{\Theta_1\big[\dot{\alpha}\,\cos\psi + \dot{\phi}\,\sin\alpha\sin\psi\big]^2 + \Theta_2\big[\dot{\alpha}\,\sin\psi - \dot{\phi}\,\sin\alpha\cos\psi\big]^2 + \Theta_3\big[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\alpha\big]^2\Big\}$$

ausgedrückt werden, wobei die Θ_i die Hauptträgheitsmomente sind.

(a) Leiten Sie die entsprechenden Bewegungsgleichungen her.

(b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen als

$$\begin{aligned} \Theta_1\,\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 &= 0\,, \qquad (1)\\ \Theta_2\,\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 &= 0\,, \qquad (2)\\ \Theta_3\,\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 &= 0\,, \qquad (3) \end{aligned}$$

umgeschrieben werden können, wobei $\omega_i := \dot{\varphi}_i$ die Winkelgeschwindigkeiten bzgl. der Hauptachsen sind, d.h.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha}\,\cos\psi + \dot{\phi}\,\sin\alpha\sin\psi\,,\\ \omega_2 &= -\dot{\alpha}\,\sin\psi + \dot{\phi}\,\sin\alpha\cos\psi\,,\\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\,\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Im Falle eines symmetrischen Kreisels gilt $\Theta_1 = \Theta_2$. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung von Gleichungen (1)–(3) in diesem Fall. Zeigen Sie insbesondere, dass $|\vec{\omega}|$ konstant ist und dass es um eine periodische Lösung handelt.

In der Prüfung sind keine Hilfsmittel erlaubt, aber die folgende Tabelle wird auf dem Prüfungsblatt gegeben:

$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a}$	$H = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\dot{q}_a - L$	$L = \frac{1}{2}\sum_{a,b} f_{ab}(q)\dot{q}_a\dot{q}_b - U$
$J = (\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\dot{q}_a - L)X - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}Q_a$	$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a} = \{q_a, H\}$	$= \frac{1}{2}\sum_a(\dot{Q}_a^2 - \omega_a^2 Q_a^2) + O(Q^3)$
$L' = L + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha$	$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} = \{p_a, H\}$	$I = \int \mathrm{d}x\, \exp(-\frac{1}{2}x^T A x - b^T x)$
$\Theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')(\delta_{ij}\lvert\vec{r}\,'\rvert^2 - x_i' x_j')$	$\{q_a, p_b\} = \delta_{ab}$	$= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}}\exp(\frac{1}{2}b^T A^{-1} b)$
$L = -mc^2\sqrt{1 - \vec{v}\,^2/c^2}$	$\mathrm{Vol}(T) = \mathrm{Vol}(T')$	$K(y, t_2; x, t_1) = \int_{x(t_1)=x}^{x(t_2)=y} \mathscr{D}x(t)\, \exp(\frac{i}{\hbar}S)$

Exercises to Mechanics II	**Sheet 4**

Exercise 1: A symmetric spinning top can be viewed as a cone with a maximal radius R, a height h, and a homogeneous mass density μ.

(a) Determine the moments of inertia with respect to the center of mass.

(b) Determine the moments of inertia for the case that the cone is upside down, with its tip fixed to the floor.

[Hint: you may make use of the Steiner's law in one of the cases.]

Exercise 2: By making use of the Euler angles, the Lagrangian of a rigid body can be expressed as

$$L = \frac{1}{2}\Big\{\Theta_1\big[\dot{\alpha}\,\cos\psi + \dot{\phi}\,\sin\alpha\sin\psi\big]^2 + \Theta_2\big[\dot{\alpha}\,\sin\psi - \dot{\phi}\,\sin\alpha\cos\psi\big]^2 + \Theta_3\big[\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\alpha\big]^2\Big\}\ ,$$

where Θ_i are the moments of inertia.

(a) Derive the equations of motion.

(b) Show that the equations of motion can rewritten as

$$\begin{aligned} \Theta_1\,\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 &= 0\ , && (4)\\ \Theta_2\,\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 &= 0\ , && (5)\\ \Theta_3\,\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 &= 0\ , && (6) \end{aligned}$$

where $\omega_i := \dot{\varphi}_i$ are the angular velocities with respect to the main achses, i.e.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha}\,\cos\psi + \dot{\phi}\,\sin\alpha\sin\psi\ ,\\ \omega_2 &= -\dot{\alpha}\,\sin\psi + \dot{\phi}\,\sin\alpha\cos\psi\ ,\\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\,\cos\alpha\ . \end{aligned}$$

Exercise 3: For a symmetric spinning top we have $\Theta_1 = \Theta_2$. Derive a general solution of equations (4)–(5) in this case. Show in particular that $|\vec{\omega}|$ is constant and that the motion is periodic.