

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für die folgenden Systeme und leiten Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ab.

- eine Perle, die reibungsfrei auf einer Helix mit Ganghöhe h und Radius R im Schwerfeld gleitet;
- ein ebenes Doppelpendel (Abb. 1);
- ein ebenes Pendel mit der Masse m_2 , dessen Aufhängepunkt mit der Masse m_1 sich entlang einer horizontalen Gerade bewegen kann (Abb. 2).

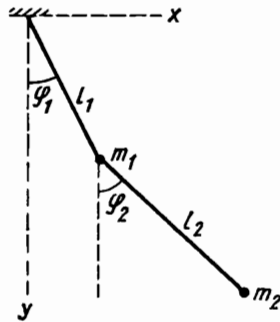


Abb. 1

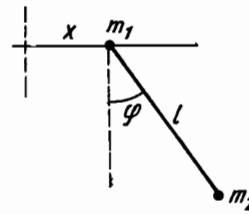


Abb. 2

Aufgabe 2: Ein homogenes Seil der Länge L liegt zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über die Tischkante. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen und beginnt reibungsfrei hinunter zu rutschen. Die lineare Massendichte sei μ .

- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie deren Lösung für die obigen Anfangsbedingungen.

Aufgabe 3: Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge d , das unter Einfluss der Schwerkraft frei schwingen kann. Die Masse des Pendelkörpers sei m , die des Fadens sei vernachlässigbar.

- Schreiben Sie die Lagrange-Funktion unter Benutzung von Kugelkoordinaten auf.
- Was sind die Symmetrien der Wirkung und die entsprechenden Erhaltungsgrößen?
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf (deren Lösung ist nicht verlangt).

Exercise 1: Determine the Lagrangians of the following systems, and derive the corresponding Euler-Lagrange equations:

- a pearl gliding without friction along a helix of height h and radius R in a homogeneous gravitational field;
- a double pendulum (see fig. 1);
- a pendulum with mass m_2 , whose attachment point, of mass m_1 , can move horizontally (see fig. 2).

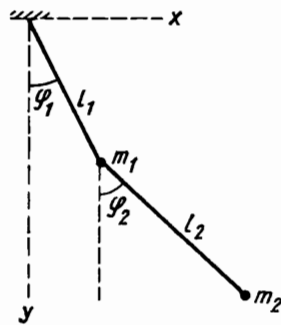


Abb. 1

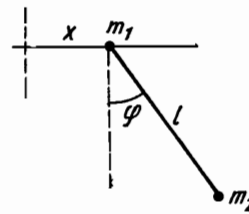


Abb. 2

Exercise 2: Half of a homogeneous rope of length L lies on a table, the other half is hanging down. At time $t = 0$ the rope is let free, and starts to slide down, without friction. The linear mass density is μ .

- Determine the Lagrangian.
- Derive the equation of motion, as well as its solution for the given initial condition.

Exercise 3: Consider a pendulum at the end of a flexible fibre of length d , oscillating in a homogeneous gravitational field. The mass of the pendulum is m , whereas that of the fibre can be ignored.

- Write the Lagrangian in spherical coordinates.
- What are the symmetries of the action and the corresponding conserved quantities?
- Derive the equations of motion (you do not need to solve them).