Übungen zu Mechanik II	**Blatt Nr. 02**

Aufgabe 1: Ein Massenpunkt bewegt sich in einem Zentralpotential: $U = U(|\vec{r}\,|) := \alpha/|\vec{r}\,|$. Die Wirkung hat die Form $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,(T-U)$, wobei $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2}$ die kinetische Energie bezeichnet. Betrachtet wird eine „Skalentransformation", definiert durch $\Delta \in \mathbb{R}^+$,

$$t \to t' := t\ , \quad \vec{r} \to \vec{r}\,' := \Delta\vec{r}\ , \quad S \to S' := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,')\ .$$

Zeigen Sie, dass das Hamiltonsche Prinzip,

$$\left.\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}\Delta}\right|_{\Delta=1} = 0\ ,$$

zum „Virialsatz" $\langle T\rangle = -\langle U\rangle/2$ führt, wobei $\langle ...\rangle$ den Mittelwert während einer Periode einer gebundenen Bewegung bezeichnet.

Aufgabe 2: Ein Massenpunkt mit Masse m und elektrischer Ladung q befinde sich in einem elektrischen Feld $\vec{E}(t,\vec{r}\,)$ und einem Magnetfeld $\vec{B}(t,\vec{r}\,)$. Elektromagnetische Felder lassen sich allgemein durch elektromagnetische Potentiale $\Phi(t,\vec{r}\,)$, $\vec{A}(t,\vec{r}\,)$ wie folgt ausdrücken,

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi, \qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}\ .$$

Die Lagrange-Funktion des Teilchens lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - q\,\Phi(t,\vec{r}\,) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}\,)\ .$$

(a) Bestimmen Sie den zu $\vec{r}$ kanonisch konjugierten Impuls $\vec{p}$, sowie die Energie $E = \sum_i \dot{x}_i \partial L/\partial\dot{x}_i - L$. Drücken Sie E als Funktion von $\vec{r}, \vec{p}, t$ aus.

(b) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichung für das Teilchen her (ausgedrückt durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$).

Aufgabe 3: In geeigneten Einheiten lautet die Lagrange-Funktion eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\vec{r}}^{\,2} - \vec{r}^{\,2})\ , \quad \vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i\ .$$

Zeigen Sie, dass die Transformation

$$x_i' = x_i + \frac{\epsilon}{2}\big(\delta_{ik}\dot{x}_l + \delta_{il}\dot{x}_k\big)\ , \quad k,l \in \{1,2,3\}\ ,$$

die Wirkung invariant lässt. Bestimmen Sie die zugehörigen Noether-Ströme J_{kl}. Zeigen Sie, dass die Energie-Erhaltung darin enthalten ist. Was könnten die anderen Erhaltungsgrössen sein? [Antwort: $J_{kl} = \dot{x}_k\dot{x}_l + x_k x_l$.]

Exercises to Mechanics II	**Sheet 2**

Exercise 1: A point particle is moving in a central potential, $U = U(|\vec{r}\,|) := \alpha/|\vec{r}\,|$. The action has the form $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,(T - U)$, where $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ is the kinetic energy. Consider a "scale transformation", defined via $\Delta \in \mathbb{R}^+$,

$$t \to t' \;\equiv\; t\;, \quad \vec{r} \to \vec{r}\,' \;\equiv\; \Delta\vec{r}\;, \quad S \to S' \;\equiv\; \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,')\;.$$

Show that the Hamilton principle,

$$\left.\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}\Delta}\right|_{\Delta=1} = 0\;,$$

implies a "virial theorem", $\langle T \rangle = -\langle U \rangle/2$, where $\langle ... \rangle$ denotes an average over one full period of a periodic movement.

Exercise 2: A point particle of mass m and electric charge q is moving in an electric field $\vec{E}(t,\vec{r}\,)$ and a magnetic field $\vec{B}(t,\vec{r}\,)$. Electromagnetic fields can be described by the scalar and vector potentials $\Phi(t,\vec{r}\,)$ and $\vec{A}(t,\vec{r}\,)$, as

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}\,.$$

The Lagrangian reads

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\,\Phi(t,\vec{r}\,) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}\,)\;.$$

(a) Determine the canonical momentum $\vec{p}$ conjugate to $\vec{r}$, as well as the energy $E = \sum_i \dot{x}_i \partial L/\partial \dot{x}_i - L$. Express E as a function of $\vec{r}, \vec{p}, t$.

(b) Derive from the Lagrangian the equations of motion, expressed in terms of $\vec{E}$, $\vec{B}$.

Exercise 3: In suitable units, the Lagrangian of a three-dimensional harmonic oscillator reads

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\vec{r}}^2 - \vec{r}^{\,2})\;, \quad \vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i\;.$$

Show that the transformation

$$x_i' = x_i + \frac{\epsilon}{2}\big(\delta_{ik}\dot{x}_l + \delta_{il}\dot{x}_k\big)\;, \quad k,l \in \{1,2,3\}\;,$$

leaves the action invariant. Determine the corresponding Noether currents J_{kl}. Show that energy conservation is a part of this set. What could the other conserved quantities be? [Answer: $J_{kl} = \dot{x}_k\dot{x}_l + x_k x_l$.]