Übungen zu Mechanik II	**Blatt Nr. 01**

Aufgabe 1: Beim Brachistochronenproblem soll die Laufzeit

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \mathrm{d}x \sqrt{\frac{1+(y')^2}{b-y}}$$

minimiert werden (hier wird die Notation des Skripts verwendet). Zeigen Sie, dass die Kurve $x(\phi) = A(\phi - \sin\phi)$, $y(\phi) = b - A(1-\cos\phi)$ die entsprechende Euler-Gleichung (bzw. deren erstes Integral) erfüllt. In welchem Bereich soll ϕ variiert werden?

Aufgabe 2: Ein homogenes Seil der Länge L wird an zwei Punkten (Horizontalabstand d, mit $d < L$; Vertikalabstand 0) aufgehängt. Die lineare Massendichte sei μ.

(a) Bestimmen Sie die Form des Seils in Ruhe (Kettenlinien-Lösung). Ausgangspunkt sei, dass die Potentialenergie (im homogenen Schwerefeld) minimiert wird.

(b) Das Seil wird nun mit einer hohen konstanten Winkelgeschwindigkeit gedreht (Sprungseil). Bleibt seine Form unverändert? Ausgangspunkt sei, dass die kinetische Energie minimiert wird, während Potentialenergie vernachlässigt werden kann.

(c) Welche Lösung ergibt einen extremalen Wert der „Rotationsfläche" des gedrehten Seils?

Aufgabe 3: Eine Zentralkraft wird durch das Potential $U(r)$ beschrieben. Ein Massenpunkt bewege sich in einer Ebene; die Bewegung wird durch die Polarkoordinaten ρ, φ parametrisiert, wobei $\vec{r} = \rho\, \vec{e}_\rho$. Ermitteln Sie die Lagrange-Funktion, indem Sie ρ und φ als verallgemeinerte Koordinaten wählen, und leiten Sie die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen her.

Aufgabe 4: Betrachtet wird eine Lagrange-Funktion der Form $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, \{\ddot{q}_i\}, t)$, eine Wirkung $S = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t\, L$, sowie Variationen mit $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = \delta\dot{q}(t_a) = \delta\dot{q}(t_b) = 0$. Ausgehend vom Hamiltonschen Prinzip $\delta S = 0$, leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen her.

Exercises to Mechanics II	**Sheet 1**

Exercise 1: In the brachistochrone problem we should minimize the duration

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \mathrm{d}x \, \sqrt{\frac{1+(y')^2}{b-y}} \; ,$$

where we are employing the notation of the script. Show that the curve $x(\phi) = A(\phi - \sin\phi)$, $y(\phi) = b - A(1-\cos\phi)$ fulfils the corresponding Euler equation (or its first integral). In which domain should ϕ be varied?

Exercise 2: A homogeneous rope of length L is attached from two points (horizontal distance d, with $d < L$; vertical distance 0). The linear mass density is μ.

(a) Determine the shape of the hanging rope at rest. As a starting point, we may assume that the potential energy is minimized (in a homogeneous gravitational field).

(b) Let us now rotate the rope at a high angular velocity. Does its shape change? We can assume that the kinetic energy is minimized, whereas the potential energy can be ignored.

(c) Which shape gives an extremal area of the surface covered by a rotating rope?

Exercise 3: A central force is described by a potential $U(r)$. A point particle is moving in a plane, so that the movement can be parametrized by the polar coordinates ρ, φ, where $\vec{r} = \rho\, \vec{e}_\rho$. What is the Lagrangian, if ρ and φ are chosen as the generalized coordinates? What are the corresponding Euler-Lagrange equations?

Exercise 4: We consider the Lagrangian $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, \{\ddot{q}_i\}, t)$, the action $S = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t\, L$, as well as variations with $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = \delta\dot{q}(t_a) = \delta\dot{q}(t_b) = 0$. Starting from the Hamilton principle $\delta S = 0$, derive the Euler-Lagrange equations.