2.3 Phasenraum, Liouvillescher Satz, Chaos

(1809-1882)

Gegeben sei ein System mit s Freiheitsgraden, Koordinaten q_a, und kanonischen Impulsen p_a. Der $2s$-dimensionale Raum mit Punkten

$$\Gamma := (q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$$

heisst <u>Phasenraum</u> des Systems (vgl. Seite 29).

Ein Punkt im Phasenraum entspricht einem vollständig charakterisierten Zustand des Systems. Die Zeitentwicklung des Systems definiert eine Kurve im Phasenraum, die <u>Phasenraum-Trajektorie</u>.

<u>Beispiele:</u> (i) eindimensionaler harmonischer Oszillator

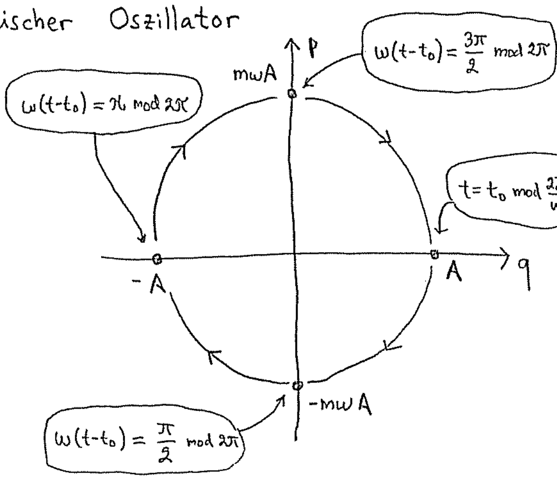
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

$$\dot p = -\partial_q H = -m\omega^2 q$$

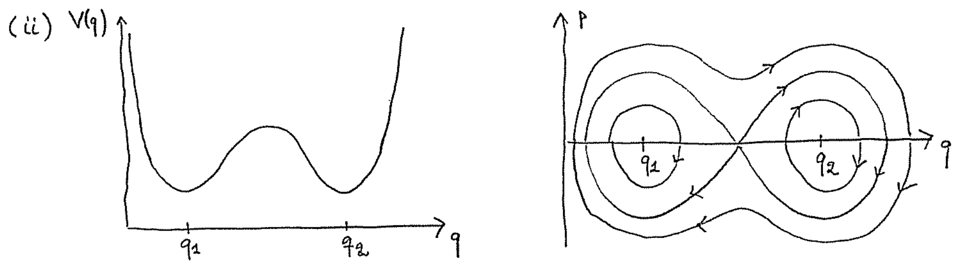
$$\dot q = \partial_p H = \frac{p}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot q = \frac{\dot p}{m} = -\omega^2 q$$

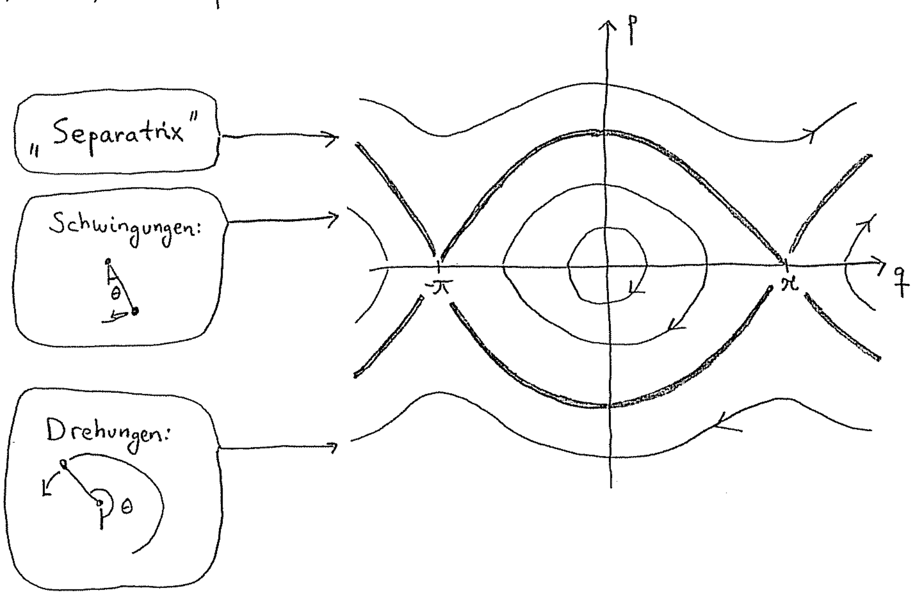
$$\Rightarrow \begin{cases} q = A\cos(\omega(t-t_0)) \\ p = -m\omega A \sin(\omega(t-t_0)) \end{cases}$$



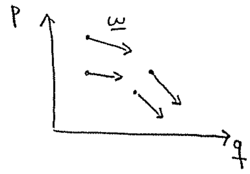
(ii)



(iii) Pendel, mit $q = \Theta$.



Geschwindigkeit des Phasenraumpunktes:



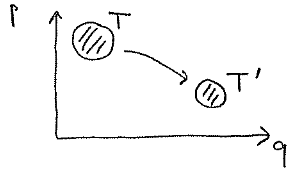
$$\dot{\Gamma} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_s)$$
$$= \left(\partial_{p_1} H, \dots, \partial_{p_s} H, -\partial_{q_1} H, \dots, -\partial_{q_s} H\right) =: \underline{\omega} .$$

Dieser Ausdruck definiert ein $2s$-dimensionales Vektorfeld im Phasenraum, $\underline{\omega}(q,p,t)$. Falls $H = H(q,p)$ nicht explizit t-abhängig ist, so ist auch $\underline{\omega} = \underline{\omega}(q,p)$ zeitunabhängig.

Divergenz des Vektorfeldes verschwindet:

$$\nabla \cdot \underline{\omega} = \sum_{a=1}^{s} \left\{ \frac{\partial \omega_a}{\partial q_a} + \frac{\partial \omega_{s+a}}{\partial p_a} \right\} = \sum_{a=1}^{s} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_a \partial p_a} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_a \partial q_a} \right\} = 0 .$$

Betrachte jetzt einen Teilbereich T des Phasenraums. Wenn sich jeder Punkt im T mit der Zeit so verschiebt wie es den Bewegungsgleichungen entspricht, verschiebt sich auch T.



Liouvillescher Satz: Der Rauminhalt eines Teilbereichs des Phasenraums, der gemäss den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen verschoben wird, ist konstant:

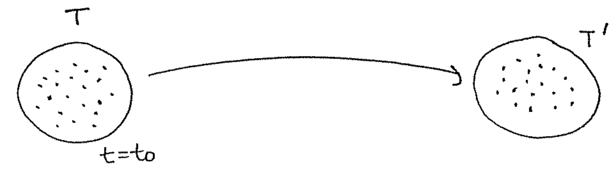
$$\mathrm{Vol}(T) = \mathrm{Vol}(T').$$

Die Form von T ändert sich im Allgemeinen bei der Verschiebung.

Bemerkung: Der Liouvillesche Satz kann als Folge der Bemerkungen (i) und (iii) auf Seite 36 betrachtet werden, hier wird aber eine andere Begründung gegeben. (Seite 39).

Physikalisch: T beschreibt eine Menge von Massenpunkten, die nah aneinander sind und ähnliche Geschwindigkeiten besitzen, wie z.B. in einem Teilbereich einer Flüssigkeit. In der Tat sind Phasenraumbetrachtungen besonders angemessen für Vielteilchensysteme.

Begründung:



Um einem Teilbereich zu folgen, wählen wir als „Tracer" eine gleichmässig verteilte Menge von Massenpunkten:

$$\varrho(t_0) := \frac{N}{\text{Phasenraumvolumen}} = \text{konstant bzgl } q, p.$$

Die Zahl N bleibt definitionsgemäss erhalten. Dies entspricht der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{J} = 0,$$

wobei $\underline{J}$ die Stromdichte bezeichnet.

(Denn: Einerseits ist $\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \varrho = \int_V \partial_t \varrho$. Andererseits ist $\frac{dN}{dt}$ = Strom aus Volumenelement $= -\int_{\partial V} d\underline{s} \cdot \underline{J} \underset{\text{Gauss}}{=} \int_V -\nabla \cdot \underline{J} \Rightarrow \square$.)

Schreibe Stromdichte als $\underline{J} = \varrho \underline{\omega}$.

$$\left(\text{Stromdichte} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Dicke}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}} \cdot \text{Geschwindigkeit}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{\omega}) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \underbrace{(\nabla \varrho) \cdot \underline{\omega}}_{\substack{=0 \\ (\text{gleichmässig verteilt})}} + \varrho \underbrace{\nabla \cdot \underline{\omega}}_{\substack{=0 \\ (\text{Seite 38})}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \text{Dichte bleibt konstant.}$$

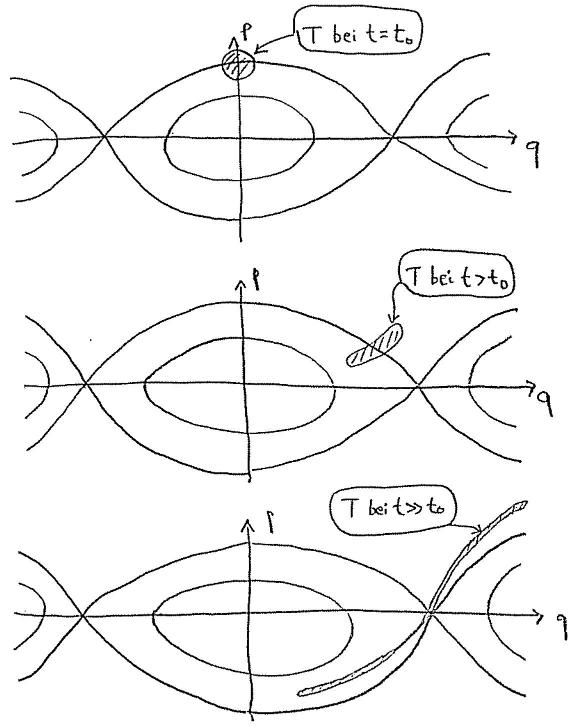
Wenn aber sowohl die Dichte als auch N unverändert bleiben, dann muss auch das Volumen von T konstant sein:

$$\underbrace{N(t)}_{\text{konstant}} = \int_{\mathrm{Vol}(T(t))} \underbrace{\varrho(t)}_{\text{konstant}} \Rightarrow \square.$$

— • —

Chaos: Phasenraumbetrachtungen machen es deutlich, dass es Systeme gibt, in denen kleine Änderungen der Anfangsbedingungen zu grossen Änderungen der Endergebnisse führen können, obwohl die Dynamik deterministisch ist.

Beispiel: Pendel (Seite 37)



⇒ Volumen bleibt unverändert, aber Form wird verzerrt.

Begriffe: Unter Umständen ist die Verzerrung so gross, dass der bei $t \to \infty$ besetzte Teilbereich, genannt <u>Grenzzyklus</u> bzw. <u>Attraktor</u>, kein Punkt bzw. Linie ist, sondern einen „seltsamen" Bereich des Phasenraums erfüllt, von sogar „nichtganzzähliger Dimension". Dann geht es um <u>Chaos</u>.

Ein quantitatives Mass für das Auseinandertreiben der Lösungen ist der Lyapunov-Exponent λ:
1857 - 1918

$$S(t) = S(t_0)\, e^{\lambda (t-t_0)},$$

wobei s eine Entfernung im Phasenraum bezeichnet. Für $\lambda > 0$ ist die Bewegung chaotisch.

Sonnensystem: $\lambda \approx 3 \times 10^{-10} \dfrac{1}{\text{Jahr}}$ (?).

——— ∘ ——— ∘ ———