2. Hamilton – Formalismus

1805 – 1865

Der dritte Formalismus der klassischen Mechanik, der Hamilton-Formalismus, ist wichtig für den Übergang zur Quantenmechanik und Statistischen Physik, und klärt auch die mathematische Struktur der klassischen Mechanik ab.

2.1 Legendre – Transformation

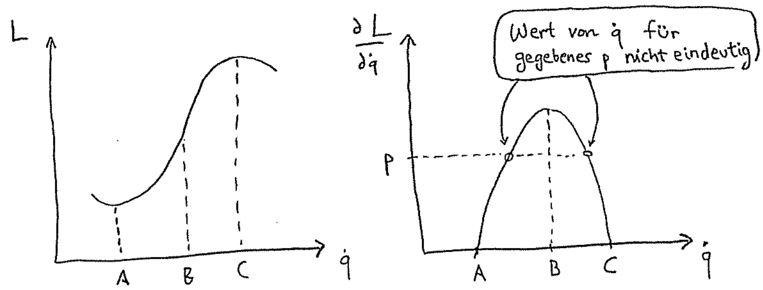
1752 – 1833

Lagrange – Formalismus: verallgemeinerte Koordinaten q_a, $a = 1, \dots, s$;
verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\dot{q}_a$, $a = 1, \dots, s$

$\Rightarrow$ Lagrange – Funktion $L(q, \dot{q}, t)$,
verallgemeinerte Impulse $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$.

Die Idee: Nehme statt $\{q_a, \dot{q}_a\}$ jetzt $\{q_a, p_a\}$ als „Koordinaten".
Diese bilden einen $2s$-dimensionalen „Phasenraum".

Herausforderungen: (i) Um $\dot{q}_a$ mit p_a in L ersetzen zu können, müssen wir zuerst die Definitionen $p_a = \partial_{\dot{q}_a} L$ invertieren können. Dies ist nur in einem Bereich möglich, wo $\partial^2 L / \partial \dot{q}^2 \neq 0$:



Man sollte sich also auf $\dot{q} < B$ oder $\dot{q} > B$ beschränken.

(ii) Die Funktion $L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$ enthält anscheinend weniger Information als $L(q, \dot{q}, t)$, zum Beispiel

$$L := \frac{m}{2} \dot{q}^2 \qquad \neq \qquad L' := \frac{m}{2} (\dot{q} - f(q))^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \qquad\qquad p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = m(\dot{q} - f(q))$$

$$\hookrightarrow L = \frac{p^2}{2m} \qquad\qquad \hookrightarrow L' = \frac{p'^2}{2m}$$

Wir erhalten dieselbe Funktion, obwohl die Physik bei $f(q) \neq 0$ unterschiedlich sein sollte.

Behauptung: Die Funktion

$$H(q,p,t) := \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L = \sum_a \dot{q}_a p_a - L,$$

genannt die Hamilton-Funktion, enthält dieselbe Information als $L(q,\dot{q},t)$, d.h. $L(q,\dot{q},t)$ kann von gegebener $H(q,p,t)$ rekonstruiert werden, solange $\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_a\partial\dot{q}_b) \neq$ gilt. In H muss $\dot{q}$ durch p ersetzt werden.

Bemerkungen:

* Mathematisch gesehen heisst die Transformation von L zu H eine Legendre-Transformation bzgl. $\dot{q}$.
* Physikalisch gesehen entspricht H der Energie (vgl. Seite 5).
* Die Variablen $\dot{q}_a$ dürfen in H nicht auftauchen:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}\Big(\sum_b \dot{q}_b p_b - L\Big) = p_a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = p_a - p_a = 0.$$

Beweis: Die Behauptung kann durch eine explizite Konstruktion, nämlich eine inverse Legendre-Transformation bewiesen werden:

$$\dot{Q}_a := \frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial}{\partial p_a}\Big[\sum_b \dot{q}_b p_b - L(q,\dot{q},t)\Big]$$

$$= \dot{q}_a + \sum_b p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} \stackrel{!}{=} \dot{q}_a .$$

$$L^{\text{neu}} = \sum_a p_a \frac{\partial H}{\partial p_a} - H$$

$$= \sum_a p_a \dot{q}_a - \Big(\sum_a \dot{q}_a p_a - L\Big) \stackrel{!}{=} L .$$

Beispiele:

(i)

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m\dot{q}^2}{2} + U = \frac{m\dot{q}^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + U .$$

Inverse Transformation:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$L^{\text{neu}} = p\dot{q} - H = \frac{p^2}{m} - \Big(\frac{p^2}{2m} + U\Big)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - U = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U .$$

(ii) Innere Energie: $U(S,V,N)$; S = Entropie
V = Volumen
N = Teilchenzahl

Temperatur: $T = \frac{\partial U}{\partial S}$.

Freie Energie: $$F(T,V,N) = U(S,V,N) - S\frac{\partial U}{\partial S} = U - TS,$$

d.h. Legendre-Transformation (mit Vorzeichen -1).

Bewegungsgleichungen:

Wir wollen die Zeitableitungen der Phasenraumkoordinaten q, p mittels der Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ ausdrücken.

* Seite 30: $\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}$.

* Betrachte jetzt $\frac{\partial H}{\partial q_a}$:

$$H = \sum_b p_b \dot{q}_b(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \sum_b p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a}$$

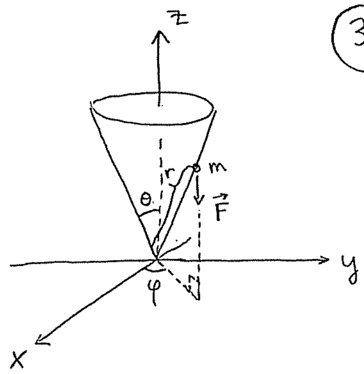
$$= -\frac{\partial L}{\partial q_a} \underset{\text{Euler-Lagrange}}{=} -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = -\frac{dp_a}{dt}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}}.$$

Im Hamilton-Formalismus gibt es also zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung, statt einer Gleichung zweiter Ordnung.

Als Folge: $$\frac{dH}{dt} = \sum_a \frac{\partial H}{\partial q_a}\dot{q}_a + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a}\dot{p}_a + \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$= \sum_a \left(-\dot{p}_a\dot{q}_a + \dot{q}_a\dot{p}_a\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Falls also H keine explizite Abhängigkeit von t aufweist, bleibt H (d.h. Energie) erhalten.



Beispiel: Ein Massenpunkt gleite reibungsfrei im Schwerefeld auf einem Kreiskegel.

Verallgemeinerte Koordinaten: r, φ.
(Der Winkel θ bleibt konstant.)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad \dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$z = r\cos\theta \qquad \dot{z} = \dot{r}\cos\theta$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$
$$U = mgz = mgr\cos\theta$$
$$L = T-U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - mgr\cos\theta\,.$$
$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

Hamilton-Funktion:

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - L$$
$$= m\dot{r}^2 + mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}{2} + mgr\cos\theta$$
$$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}{2} + mgr\cos\theta$$
$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + mgr\cos\theta\,.$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta} - mg\cos\theta$$
$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \quad p_\varphi \text{ ist Erhaltungsgrösse!}$$
$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\,.$$

Es folgt:
$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m} = \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{m^2\sin^2\theta}}_{\text{Konstante}}\cdot\frac{1}{r^3} - \underbrace{g\cos\theta}_{\text{Konstante}}\,.$$

Diese Gleichung ist unabhängig vom φ, und könnte für $r(t)$ gelöst werden. Nachher kann $\varphi(t)$ aus $\dot{\varphi}(t) = \frac{p_\varphi}{mr^2(t)\sin^2\theta}$ bestimmt werden.