1.7 Zusammenfassung und Ergänzungen

Die Hauptpunkte der bisherigen Kapitel sind:

(1.1) Die Newtonschen Gesetze können durch den Lagrange-Formalismus neu interpretiert werden:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q},t)\,, \qquad L = T - U \quad ;$$

$$\delta S = 0 \qquad \text{(Hamiltonsches Prinzip)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_a} \quad \forall\, t,a \qquad \text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}.$$

(1.2) Der enge Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen wird damit deutlich, z.B. $\partial_t L = 0 \Rightarrow$ Energie-Erhaltung; $\partial_{q_a} L = 0 \Rightarrow$ Erhaltung des verallgemeinerten Impulses $p_a = \partial_{\dot{q}_a} L$. Hauptergebnis ist das Noether-Theorem $\Rightarrow$ Seite 28.

(1.3) Zwangsbedingungen können mit dem Lagrange-Formalismus relativ leicht behandelt werden. Man soll Koordinaten geeignet wählen und gegebenenfalls Lagrange-Multiplikatoren einführen ($L' = L + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha$). Mehr dazu auf Seite 26.

(1.4) Auch die komplizierte Bewegung eines rotierenden starren Körpers kann dank des Lagrange-Formalismus verstanden werden. Dabei werden auch „Scheinkräfte" automatisch in Rücksicht genommen $\Rightarrow$ Seite 27.

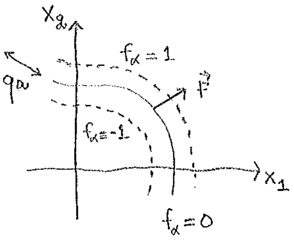
(1.5) Eine wichtige Methode zur Lösung von komplizierten Bewegungsgleichungen ist ihre „Linearisierung" um eine bekannte einfache Lösung, z.B. stationäre Bewegung oder Ruhelage. Die kleinen Schwingungen um diese Lösung können durch abgekoppelte „Normalkoordinaten" beschrieben werden.

(1.6) Der Lagrange-Formalismus kann in vieler Hinsicht verallgemeinert werden, z.B. auf relativistische Teilchen $\left(S = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(mc^2 + \frac{q}{c}\, u\cdot A\right)\right)$ oder Felder $\left(S = -\int d^4x \left(\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} J_\mu A^\mu\right)\right)$.

Im letzteren Fall lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \quad \forall\, t,\vec{x},a\,.$$

Ergänzung 1: Eine alternative Diskussion zu Lagrange-Multiplikatoren (vgl. Seiten 10-11)



Betrachte System mit Zwangsbedingungen $f_\alpha = 0$, vorerst in kartesischen Koordinaten $\vec{r}$. Zwangskraft ist orthogonal zur Oberfläche $f_\alpha(\vec{r}) = 0$ $\Rightarrow$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U + \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla f_\alpha \qquad \text{„Lagrange-Gl. 1. Art"} .$$

Parametrisiere $\vec{r} = (x_1(q_a,t), x_2(q_a,t), x_3(q_a,t))$ so dass $f_\alpha(\vec{r}(q_a,t)) = 0$ gilt.
Multipliziere die Komponenten der obigen Gleichung mit $\partial x_k / \partial q_a$:

$$\sum_k m\ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_a} = \underbrace{-\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_a}}_{-\frac{\partial U}{\partial q_a}} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \underbrace{\sum_k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_a}}_{\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a} = 0} \qquad (1)$$

λ_α: kann zeitabhängig sein

$\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a} = 0$ weil $f_\alpha(\vec{r}(q_a,t)) = 0$.

Der Teil mit der kinetischen Energie muss umgeschrieben werden.
Häufig gebraucht:

$$\dot{x}_k = \sum_a \frac{\partial x_k}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\partial x_k}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial x_k}{\partial q_a} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial q_a} = \sum_b \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_a \partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_k}{\partial q_a} = \frac{\partial}{\partial q_a}\left(\sum_b \frac{\partial x_k}{\partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial x_k}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_a} \quad (3)$$

Damit ist:

$$T = \sum_k \frac{m}{2}\dot{x}_k^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_k m\dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \sum_k m\dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_a} \overset{(2)}{=} \sum_k m\dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) = \sum_k m\ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_a} + \sum_k m\dot{x}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial q_a} \overset{(3)}{=} \sum_k m\ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_a} + \sum_k m\dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_a}$$

$$\Rightarrow \sum_k m\ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} .$$

So kann (1) umgeschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\right) = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_a} .$$

Falls wiederum U keine Abhängigkeit von $\dot{q}_a$ aufweist, folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} \qquad \text{„Lagrange-Gl. 2. Art"} .$$

Ergänzung 2: Krummlinige Koordinaten und Punkttransformationen

Die Wahl der Koordinaten q_a ist nicht eindeutig. Die Form von T ist nur in kartesischen Koordinaten bekannt, nachher können aber andere (auch krummlinige oder zeitabhängige) Koordinaten gewählt werden. Dabei bleibt die Form von Euler-Lagrange-Gleichungen unverändert!

Alte Koordinaten: $\{q_a\}, t.$

Neue Koordinaten: $q_a = q_a(\bar{q}, t)$ „Punkttransformation"

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_a = \sum_c \frac{\partial q_a}{\partial \bar{q}_c} \dot{\bar{q}}_c + \frac{\partial q_a}{\partial t}$$

Definiere $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) := L\left(\{q_a\}, \left\{\sum_c \frac{\partial q_a}{\partial \bar{q}_c} \dot{\bar{q}}_c + \frac{\partial q_a}{\partial t}\right\}, t\right)$.

Behauptung: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_a}\right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_a}$.

Beweis:
$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_b} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial \bar{q}_b} + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(\sum_k \frac{\partial^2 q_a}{\partial \bar{q}_b \partial \bar{q}_c} \dot{\bar{q}}_c + \frac{\partial^2 q_a}{\partial \bar{q}_b \partial t}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_b} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial q_a}{\partial \bar{q}_b}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_b}\right) = \sum_a \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) \frac{\partial q_a}{\partial \bar{q}_b} + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(\sum_c \frac{\partial^2 q_a}{\partial \bar{q}_b \partial \bar{q}_c} \dot{\bar{q}}_c + \frac{\partial^2 q_a}{\partial t \partial \bar{q}_b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_b}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_b} = \sum_a \underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_a}\right\}}_{0} \frac{\partial q_a}{\partial \bar{q}_b} = 0 \Rightarrow \square .$$

Die unterschiedlichen Koordinaten sind wie folgt miteinander verwandt:

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\begin{array}{c} L = T - U \\ \text{in kartesischen Koordinaten} \\ \text{im Inertialsystem} \end{array}} \arrow[dl, "\{q_a\}"'] \arrow[dr, "\{\bar{q}_b\}"] & \\
\boxed{L(q, \dot{q}, t)} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Punkttransformation}"'] & & \boxed{\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}
\end{tikzcd}$$

Ergänzung 3: Herleitung des Noether-Theorems

Betrachte die gleichzeitige Transformation (vgl. Seite 8)

$$\begin{cases} t \to t' = t + \varepsilon X(t) \\ q_a(t) \to q_a'(t') = q_a(t) + \varepsilon Q_a(t), \end{cases}$$

wobei $\varepsilon \ll 1$ und X, Q_a die „Generatoren" einer Transformation sind.

Wir nehmen an, dass die Wirkung* invariant ist:

$$\Delta S' = \int_{\Delta'} dt'\, L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right) = \int_{\Delta} dt\, L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

* Genauer gesagt Beitrag zur Wirkung vom kleinen Zeitintervall Δ

Hier ist:

$$dt' = \frac{dt'}{dt}\, dt = (1 + \varepsilon \dot{X})\, dt$$

$$\frac{dq_a'(t')}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt}\left(q_a(t) + \varepsilon Q_a(t)\right) = \frac{1}{1+\varepsilon \dot{X}} \left(\dot{q}_a + \varepsilon \dot{Q}_a\right)$$

$$= \dot{q}_a + \varepsilon\left(\dot{Q}_a - \dot{q}_a \dot{X}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right) = L\left(q + \varepsilon Q, \dot{q} + \varepsilon(\dot{Q} - \dot{q}\dot{X}), t + \varepsilon X\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= L + \varepsilon \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial q_a} Q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\left(\dot{Q}_a - \dot{q}_a \dot{X}\right)\right] + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} X + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Einsatz in die Gleichung $\Delta S' = \Delta S + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \varepsilon \int_{\Delta} dt \left[\dot{X} L + X \partial_t L + \sum_a \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_a}}_{\text{Euler-Lagrange: } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)} Q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{Q}_a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a \dot{X}\right)\right].$$

Wir bemerken, dass Folgendes gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a\right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) \dot{q}_a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a\right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Deshalb ist

$$0 = \varepsilon \int_{\Delta} dt \left[\dot{X}\left(L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a\right) + X \overbrace{\frac{d}{dt}\left(L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a\right)}^{\partial_t L \text{ wurde so ersetzt}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} Q_a\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \varepsilon \int_{\Delta} dt \frac{d}{dt} \underbrace{\left[X\left(L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} Q_a\right]}_{=: -J \text{ (Seite 8)}} \quad \forall\, \Delta, \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dJ}{dt} = 0,$$ d.h. Noether-Strom bleibt erhalten.
