1.6 Relativistische Massenpunkte

Zur Erinnerung: [Mechanik I]

* Lorentz-invarianter „Abstand": $ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2$.

* „Eigenzeit": $c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2 \Leftrightarrow d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$.

* 4-Vektor: $dx := (dx^0, d\vec{r})$ mit $dx^0 := c\,dt$.

* 4-Geschwindigkeit: $u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}$.

  Hier ist $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{d\tau/dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} =: \gamma \Rightarrow u = \gamma(c,\vec{v})$.

  Es gilt: $u^2 := u^\mu u_\mu = \gamma^2(c^2-\vec{v}^2) = c^2$.

* 4-Impuls: $p := mu = m\gamma(c,\vec{v}) \Rightarrow p^2 = m^2c^2$.

  Physikalische Interpretation: $p = (\frac{E}{c}, \vec{p})$.

* Bewegungsgleichung: $\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu$.

Lagrange-Funktion und Wirkung eines freien relativistischen Teilchens

Wir haben bis jetzt gehabt: $L = T - U$, $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$.
Eine Konstante darf man immer hinzufügen, als Teil von U. Sei dies die Einsteinsche „Ruhe-Energie", d.h. $U \to mc^2$. Daraus kann man schon die relativistische Form erraten:

$$L_{n.r.} := -mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = -mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)$$

nicht-relativistisch

$$\Rightarrow \quad L := -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}.$$

Besonders einfach ist die Wirkung:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = -mc^2\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \stackrel{!}{=} -mc^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau.$$

Dies ist eine manifest Lorentz-invariante Grösse!

4-Impuls: Weil L unabhängig von $\vec{r}$ und t ist, sind $\vec{p}$ und E Erhaltungsgrössen (vgl. Kapitel 1.2). Konstruieren wir diese:

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial}{\partial v^i}\left\{-mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\right\} = \frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}},$$

$$E = \sum_i \dot{x}^i p^i - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Folglich finden wir den 4-Impuls wieder:

$$P := \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = m\gamma(c, \vec{v}) = mu.$$

Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld

Das elektromagnetische Feld kann durch Potentiale beschrieben werden: $\{A^0 := \Phi, \vec{A}\}$. Dabei ist

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Wenn wir einen „Feldstärketensor" als

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

definieren, gilt

$$F^{0i} = -E^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^0} + \frac{\partial A^0}{\partial x^i} = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = \partial^0 A^i - \partial^i A^0,$$

$$F^{12} = -B^3 = -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -\partial_1 A^2 + \partial_2 A^1 = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1,$$

und im Allgemeinen $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Die Lagrange-Funktion ist jetzt: (vgl. Aufgabe 2 vom Blatt 2):

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - \frac{q}{c}\frac{dx_\mu}{dt}A^\mu,$$

wobei q die elektrische Ladung bezeichnet.
Die Wirkung ist wieder schöner als L:

$$S = -mc^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau - \frac{q}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{dx_\mu}{dt}A^\mu \qquad \Big| \; dt\,\frac{dx_\mu}{dt} = d\tau\,\underbrace{\frac{dx_\mu}{d\tau}}_{u_\mu}$$

$$= -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\left(mc^2 + \frac{q}{c}\,u\cdot A\right) \quad ; \; u\cdot A = u_\mu A^\mu.$$

Bemerkungen:

* Der neue Teil $S_{neu} = -\frac{q}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, u\cdot A$ ist wieder manifest Lorentz-invariant.

* Diese Addition ist auch „eichinvariant":

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$$

$$\Rightarrow \quad S_{neu} \to S_{neu} - \frac{q}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{dx_\mu}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial x_\mu}}_{\frac{d\chi}{dt}} = S_{neu} - \frac{q}{c}\left[\chi\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Laut Seite 4 haben aber Randterme keine physikalische Bedeutung.

Bewegungsgleichung:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec v^2}{c^2}} - \frac{q}{c}\frac{dx_\mu}{dt}A^\mu = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot x^i \dot x^i}{c^2}} - \frac{q}{c}\left(cA^0 - \dot x^i A^i\right)$$

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot x^i} = m\gamma \dot x^i + \frac{q}{c}A^i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -q\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{q}{c}\dot x^j \frac{\partial A^j}{\partial x^i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mu^i) = -\frac{q}{c}\frac{dA^i}{dt} - q\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{q}{c}\dot x^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i}$$

$$= -\frac{q}{c}\left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + \dot x^j \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right) - q\,\partial_i A^0 + \frac{q}{c}\dot x^j \partial_i A^j$$

$$= -q\underbrace{\left(\partial^0 A^i - \partial^i A^0\right)}_{F^{0i}} - \frac{q}{c}\dot x^j \underbrace{\left(\partial^i A^j - \partial^j A^i\right)}_{F^{ij}}$$

$$= \frac{q}{c}\left(F^{i0}c - F^{ij}\dot x^j\right)$$

Multipliziere beide Seiten mit γ.

Seite 21: $\gamma\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$, $\gamma(c,\vec v) = u$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{d\tau}(mu^i) = \frac{q}{c}F^{i\mu}u_\mu.}$$

Ausserdem gilt:

$$u^\mu u_\mu = u^0u^0 - u^iu^i = c^2$$

$$\Rightarrow \quad mu^0\frac{du^0}{d\tau} = mu^i\frac{du^i}{d\tau} = \frac{q}{c}u^iF^{i\mu}u_\mu$$

$$= \frac{q}{c}\left(u^0F^{0\mu}u_\mu - \underbrace{u_\nu F^{\nu\mu}u_\mu}_{}\right)$$

verschwindet wegen Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{d\tau}(mu^0) = \frac{q}{c}F^{0\mu}u_\mu.}$$

Verallgemeinerung:

Falls es mehrere geladene Teilchen gibt, benutzt man lieber eine „Ladungsstromdichte":

$$\frac{q}{c}\left(cA^0 - \vec{v}\cdot\vec{A}\right) \to \sum_a \frac{q_a}{c}\left(c, \vec{v}_a\right)\cdot\left(A^0(t,\vec{r}_a), \vec{A}(t,\vec{r}_a)\right)$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}\, \underbrace{\sum_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_a)\left(c, \vec{v}_a\right)}_{=:\, J^\mu(t,\vec{r})}\cdot\left(A^0(t,\vec{r}), \vec{A}(t,\vec{r})\right)$$

$$\Rightarrow\ S_{neu} = -\frac{1}{c}\int dt \int d^3\vec{r}\ J_\mu(t,\vec{r})\, A^\mu(t,\vec{r}) = \underline{-\frac{1}{c^2}\int d^4x\ J_\mu A^\mu}.$$

Feldgleichungen:

Wenn man eine Wirkung der Form $S = \int d^4x\, \mathcal{L}$ hat, statt $S = \int dt\, L$, heisst $\mathcal{L}$ eine Lagrange-Dichte. Die Lagrange-Dichte ist eine Funktion von Feldern (z.B. $A^\mu(x), J_\mu(x)$; $x = (t,\vec{r})$), statt Koordinaten einer Bahnkurve (z.B. $q(t)$).

Das Hamiltonsche Prinzip kann immer noch benutzt werden:

$$S = \int d^4x\ \mathcal{L}\left(\Phi, \partial_\mu \Phi\right)$$

$$0 = \delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\, \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\, \delta\left(\partial_\mu \Phi\right) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \delta\Phi \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\right)\right]}_{\text{Euler-Lagrange für Felder}} + \underbrace{\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\,\delta\Phi\right]}_{\substack{\text{Gaußscher Satz} \\ \Rightarrow \text{Oberflächenintegral} \\ \Rightarrow 0}} \right\}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^4}$$

Insbesondere (Blatt 6, Aufgabe 3):

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} J_\mu A^\mu \right\}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu}$$

(Maxwell-Gleichungen)
(1831–1879

———— ∘ ————