1.5 Kleine Schwingungen

Falls die Bewegungsgleichungen „nichtlinear" sind, d.h. unterschiedliche Potenzen der zu bestimmenden Funktionen auftauchen, ist ihre exakte Lösung häufig schwierig. Eine „linearisierte" Lösung um eine Ruhelage kann aber immer gefunden werden. Falls die Ruhelage stabil ist, weist die linearisierte Lösung kleine Schwingungen auf; sonst gibt es exponentiell wachsende Lösungen, d.h. „instabile Richtungen".

Beispiel: Frei fallender starrer Körper im Schwerpunktsystem. Seien $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ die Hauptträgheitsmomente und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten bzgl. der Hauptachsen.

Die Bewegungsgleichungen lauten (vgl. Blatt 4 / Aufgabe 2)

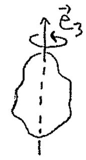
$$\begin{cases} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2 \omega_3 = 0 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1 \omega_3 = 0 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} .$$

* Besser gesagt: stationäre Lage

„Ruhelage"* $\Rightarrow$ $\dot{\omega}_i = 0 \;\; \forall\, i$. Nehme an: $\Theta_i \neq \Theta_j \;\; \forall\, i \neq j$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_2 \omega_3 = 0 \\ \omega_1 \omega_3 = 0 \\ \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} .$$

$\Rightarrow$ mindestens zwei Kreisfrequenzen müssen verschwinden, z.B. $\omega_1 = \omega_2 = 0$, aber eine kann ungleich null sein, z.B. $\omega_3 =: \omega_3^{(0)} \neq 0$.



Wir linearisieren die Bewegungsgleichungen um diesen Zustand.

$$\omega_i = \omega_i^{(0)} + \delta\omega_i \,, \qquad \dot{\omega}_i = \delta\dot{\omega}_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta_1\, \delta\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\, \delta\omega_2\, \omega_3^{(0)} + \mathcal{O}(\delta\omega)^2 = 0 \\ \Theta_2\, \delta\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\, \delta\omega_1\, \omega_3^{(0)} + \mathcal{O}(\delta\omega)^2 = 0 \\ \Theta_3\, \delta\dot{\omega}_3 \qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(\delta\omega)^2 = 0 \end{cases} .$$

Zur ersten Ordnung bleibt ω_3 also konstant.
Im Folgenden werden die Terme $\mathcal{O}(\delta\omega)^2$ weggelassen.

$\hookrightarrow$

Nehme Ableitung von erster Gleichung:

$$0 = \Theta_1 \delta\ddot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\delta\dot{\omega}_2\, \omega_3^{(0)}$$
$$= \Theta_1 \delta\ddot{\omega}_1 - (\Theta_3-\Theta_2)(\Theta_1-\Theta_3)\frac{(\omega_3^{(0)})^2}{\Theta_2}\,\delta\omega_1$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = \delta\ddot{\omega}_1 + \frac{(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_2-\Theta_3)}{\Theta_1\Theta_2}(\omega_3^{(0)})^2\,\delta\omega_1 .$$

Für $\delta\omega_2$ findet man dieselbe Gleichung.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

(i) $(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_2-\Theta_3) > 0$, d.h. Θ_1 und $\Theta_2 > \Theta_3$ oder Θ_1 und $\Theta_2 < \Theta_3$

$$\Rightarrow \frac{(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_2-\Theta_3)}{\Theta_1\Theta_2}(\omega_3^{(0)})^2 =: \Omega^2 > 0$$

$$\Rightarrow \delta\omega_1 = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$$

$\Rightarrow$ stabile Lösung bzw. kleine Schwingungen.

(ii) $(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_2-\Theta_3) < 0$, d.h. $\Theta_1 < \Theta_3 < \Theta_2$ oder $\Theta_2 < \Theta_3 < \Theta_1$

$$\Rightarrow \frac{(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_2-\Theta_3)}{\Theta_1\Theta_2}(\omega_3^{(0)})^2 =: -\varkappa^2 < 0$$

$$\Rightarrow \delta\omega_1 = C e^{\varkappa t} + D e^{-\varkappa t} .$$

Wenn $C \neq 0$, geht es um eine exponentiell wachsende instabile Lösung.

Physikalische Interpretation: Drehungen um die Achse des kleinsten und grössten Trägheitsmoments sind stabil. Dagegen sind Drehungen um die Achse des mittleren Trägheitsmoments instabil, und lassen sich unter normalen Bedingungen nicht realisieren.

Allgemeiner Fall

Sei $L = \frac{1}{2}\sum_{a,b} f_{ab}(q)\,\dot{q}_a\dot{q}_b - U(q)$ (vgl. Seite 5).

Ruhelage befinde sich bei $q_0 = (q_1^{(0)}, \ldots, q_s^{(0)})$ mit $\frac{\partial U(q_0)}{\partial q_a} = 0 \; \forall a.$

Wir entwickeln L zur zweiten Ordnung in $\delta q = q - q_0$, mit $\dot{q} = \delta\dot{q}$. Wir betrachten also den Fall $\dot{q}_0 = 0$.

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}\sum_{a,b} f_{ab}(q_0)\,\delta\dot{q}_a\delta\dot{q}_b - U(q_0) - \underbrace{\sum_a \frac{\partial U}{\partial q_a}}_{0}\delta q_a - \frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\partial^2 U}{\partial q_a \partial q_b}\delta q_a \delta q_b + O(\delta q^3).$$

Bezeichne $M_{ab} := f_{ab}(q_0)$ und $K_{ab} := \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_a \partial q_b}\right|_{q=q_0}$.

Als Matrizen sind sowohl M als auch K symmetrisch.*

Es bleibt zu zeigen, dass beide gleichzeitig diagonalisiert werden können (vgl. Mechanik I).

Schritt 1 : $\quad \delta q' := O\,\delta q \quad ; \quad \delta q = O^T \delta q'$, so dass

$$O M O^T =: M_D = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_s \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\sum_a m_a (\delta\dot{q}'_a)^2 - U(q_0) - \frac{1}{2}\delta q'^T O K O^T \delta q' + O(\delta q'^3).$$

Schritt 2 : $\quad Q'_a := \sqrt{m_a}\,\delta q'_a \quad ;$

$$\delta q' = M_D^{-1/2} Q' \quad \text{mit} \quad M_D^{-1/2} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{m_s}} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\dot{Q}'^T \dot{Q}' - U(q_0) - \frac{1}{2} Q'^T M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2} Q' + O(Q'^3).$$

Schritt 3: Die Matrix $M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2}$ ist symmetrisch:

$$\left(M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2}\right)^T \underset{(M_D^{-1/2})^T = M_D^{-1/2}}{=} M_D^{-1/2} O K^T O^T M_D^{-1/2} \underset{K^T = K}{=} M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2}.$$

Deshalb kann sie wieder diagonalisiert werden:

$$M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2} = \bar{O}\,\Omega_D\,\bar{O}^T,$$

$$\Omega_D := \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_s^2 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $Q := \bar{O}^T Q'$, $\quad Q^T = Q'^T \bar{O}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\dot{Q}^T\dot{Q} - U(q_0) - \frac{1}{2} Q^T \Omega_D Q + O(Q^3)$$

$$= \sum_a \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_a^2 - \omega_a^2 Q_a^2\right) + \text{const.} + O(Q^3).$$

---

* $\sum_{a,b} M_{ab}\,\delta q_a \delta q_b = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\left(M_{ab}\,\delta q_a \delta q_b + \underset{ba}{M_{\cancel{ab}}}\,\underset{b}{\delta q_{\cancel{a}}}\,\underset{a}{\delta q_{\cancel{b}}}\right) = \sum_{a,b}\frac{M_{ab}+M_{ba}}{2}\,\delta q_a \delta q_b$,

und ähnlich für K.

* Häufig auch: Eigenkreisfrequenzen.

Zusammenfassung:

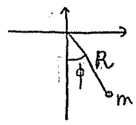
Die $\{Q_a\}$ heissen die <u>Normalkoordinaten</u>, und die $\{\omega_a\}$ die <u>Normalfrequenzen</u>.* Die entsprechenden kleinen Schwingungen sind unabhängig voneinander:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_a} = -\omega_a^2 Q_a \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_a}\right) = \ddot{Q}_a \quad .$$

Falls $\omega_a^2 > 0$ geht es um eine stabile Richtung, falls $\omega_a^2 < 0$ um eine instabile. Beim $\omega_a^2 = 0$ ist Q_a eine zyklische Koordinate (vgl. Seite 6).

Beispiel:

Pendel (Seite 10)



$$L = T - U = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2 + mg R \cos\phi$$

Ruhelage: $\quad \frac{\partial}{\partial \phi}\, mgR\cos\phi \quad = -mgR\sin\phi = 0$

$$\Rightarrow \phi = 0 \text{ oder } \phi = \pi.$$

(i) Entwicklung um $\phi = 0$: $\quad \cos\phi = 1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4)$.

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} mgR\phi^2 + \text{const.} + \mathcal{O}(\phi^4) \quad .$$

Normalkoordinate: $\quad \sqrt{m}\, R\phi =: Q$

$$\Rightarrow mgR\phi^2 = \frac{g}{R} Q^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 := \frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}^2 - \omega^2 Q^2\right) + \text{const.} + \mathcal{O}(Q^4)$$

$\Rightarrow$ es geht um eine <u>stabile Ruhelage</u>.

(ii) Entwicklung um $\phi = \pi$: $\quad \cos(\pi + \delta\phi) = -\cos\delta\phi$

$$= -1 + \frac{1}{2}\delta\phi^2 + \mathcal{O}(\delta\phi^4)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} R^2 \delta\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} mgR\,\delta\phi^2 + \text{const.} + \mathcal{O}(\delta\phi^4) \quad .$$

Normalkoordinate: $\quad \sqrt{m}\, R\,\delta\phi =: Q$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}^2 + \varkappa^2 Q^2\right) + \text{const.} + \mathcal{O}(Q^4) \quad ,$$

mit $\varkappa^2 := \frac{g}{R} > 0$

$\Rightarrow$ es geht um eine <u>instabile Ruhelage</u>.

—— · ——