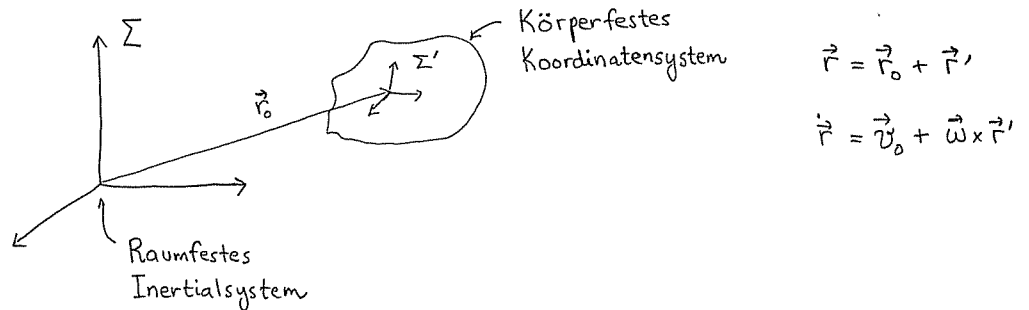


# 1.4 Starrer Körper

Ein Beispiel für ein System mit Zwangsbedingungen ist ein starrer Körper. Dieser besteht aus Massenpunkten, deren Abstände vorgegeben sind. Wir führen zuerst den Begriff des Trägheitstensors ein (vgl. Mechanik I).



Wir bestimmen die kinetische Energie des rotierenden Körpers:

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_a)^2$$

$$= \frac{1}{2} (\sum_a m_a) \vec{v}_0^2 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \times \sum_a m_a \vec{r}'_a + \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)^2$$

Gesamtmasse  $M$  ↗ Falls Ursprung von  $\Sigma'$  beim Schwerpunkt liegt, verschwindet  $\sum_a m_a \vec{r}'_a$ .

Folglich können wir den letzten Term umschreiben:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)^2 = \sum_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_a)_i$$

Summenkonvention und Levi-Civita-Symbol ↗  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} \omega_j x'_{ak} \omega_m x'_{an}$   
 1873-1941 ↗  $\omega_j [\underbrace{\epsilon_{jmn} (x'_{ak} x'_{ak})}_{|\vec{r}'_a|^2} - x'_{aj} x'_{am}] \omega_m$   
 $\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$

Daher hat die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^3 \omega_i \Theta_{ij} \omega_j$$

wobei  $\Theta_{ij} = \sum_a m_a (\delta_{ij} |\vec{r}'_a|^2 - x'_{ai} x'_{aj})$

$\Theta_{ij} \stackrel{\text{Kontinuumlimes}}{=} \int d^3 \vec{r}' \rho(\vec{r}') (\delta_{ij} |\vec{r}'|^2 - x'_i x'_j)$

der Trägheitstensor ist. (Formell:  $\mathcal{I}(\vec{r}') = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_a)$ .)

Zur Erinnerung:

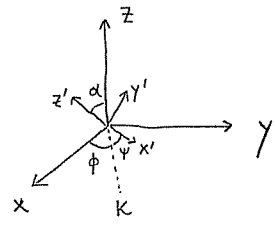
Als symmetrische Matrix kann  $\Theta$  diagonalisiert werden.  
Die entsprechende Koordinatenwahl heisst Hauptachsensystem.  
In diesem System hat  $\Theta$  die Form

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix},$$

wobei  $\Theta_i$  die Hauptträgheitsmomente sind. Folglich gilt  $T = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^2 + \frac{1}{2} (\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2)$ .

Koordinatenwahl:

Wir wählen als verallgemeinerte Koordinaten die Koordinaten des Schwerpunkts bzgl.  $\Sigma$  ( $\vec{r}_0 = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ ) und die Winkel der Hauptachsen bzgl.  $\Sigma$ , parametrisiert durch die "Eulerschen Winkel".



- $\alpha =$  Winkel zwischen  $z$ - und  $z'$ -Achsen
- $K =$  "Knotenlinie", wo die  $(x,y)$ - und  $(x',y')$ -Ebenen sich schneiden
- $\phi =$  Winkel zwischen  $x$ -Achse und  $K$
- $\psi =$  Winkel zwischen  $x'$ -Achse und  $K$

Winkelgeschwindigkeit:  $\vec{\omega} = \dot{\alpha} \vec{e}_K + \dot{\phi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{e}_{z'}$ .

Wir wollen die Komponenten von  $\vec{\omega}$  im  $\Sigma'$  ausdrücken, weil die  $\Theta_{ij}$  in diesem System Konstanten sind. Dazu müssen  $\vec{e}_K$  und  $\vec{e}_z$  mittels  $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$  ausgedrückt werden.

- \*  $\vec{e}_K$  liegt in der  $(x',y')$ -Ebene  $\Rightarrow \vec{e}_K = \cos\psi \vec{e}_{x'} - \sin\psi \vec{e}_{y'}$
- \*  $\vec{e}_z$  hat eine einfache Projektion in die  $\vec{e}_{z'}$ -Richtung, während Projektion in die  $\vec{e}_{x'}$ - und  $\vec{e}_{y'}$ -Richtungen Überlegungen verlangt:  $\vec{e}_z = \sin\alpha \sin\psi \vec{e}_{x'} + \sin\alpha \cos\psi \vec{e}_{y'} + \cos\alpha \vec{e}_{z'}$ .

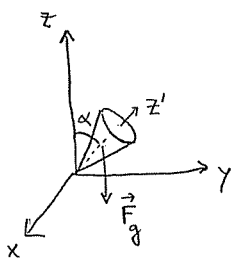
Damit können die Komponenten von  $\vec{\omega}$  ausgelesen werden:

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\alpha} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\alpha \sin\psi \\ \omega_{y'} = -\dot{\alpha} \sin\psi + \dot{\phi} \sin\alpha \cos\psi \\ \omega_{z'} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\alpha \end{cases}$$

Bewegungsgleichungen

Ohne Schwerpunktbewegung lautet die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}
 L &= T - U \\
 &= \frac{1}{2} (\Theta_1 \omega_x^2 + \Theta_2 \omega_y^2 + \Theta_3 \omega_z^2) - U(\alpha, \phi, \psi) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \Theta_1 [\dot{\alpha} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \alpha \sin \psi]^2 + \Theta_2 [-\dot{\alpha} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \alpha \cos \psi]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \Theta_3 [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha]^2 \right\} - U(\alpha, \phi, \psi).
 \end{aligned}$$



Wir beschränken uns jetzt auf den Fall eines „symmetrischen Kreisels“, mit  $\Theta_1 = \Theta_2$ . In diesem Fall kürzen sich zwei gemischten Terme in L, und

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \Theta_1 [\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha] + \Theta_3 [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha]^2 \right\} - U(\alpha, \phi, \psi).$$

Als Kraft sei ein konstantes Schwerfeld angenommen:

$$U := mgs \cos \alpha.$$

Damit ist L invariant in Zeittranslationen (vgl. Seite 5) und besitzt die zyklischen Koordinaten  $\phi, \psi$  (vgl. Seite 6), so dass drei Erhaltungsgrößen identifiziert werden können:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad E &= \dot{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \dot{\psi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - L \\
 &= \Theta_1 [\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha] + \Theta_3 [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha] [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha] - L \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \Theta_1 [\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha] + \Theta_3 [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha]^2 \right\} + mgs \cos \alpha
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2 \alpha + \Theta_3 [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha] \cos \alpha$$

$$(iii) \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3 [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha]$$

Eliminiere  $\dot{\psi}$  und  $\dot{\phi}$  mittels (ii) und (iii):

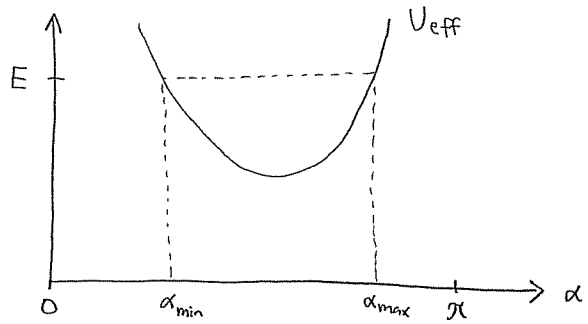
$$(iii) \Rightarrow \Theta_3 [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha] = p_\psi; \quad (ii) \Rightarrow \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2 \alpha = p_\phi - p_\psi \cos \alpha$$

$$\Rightarrow E = \frac{\Theta_1}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \alpha)^2}{2 \Theta_1 \sin^2 \alpha} + \frac{p_\psi^2}{2 \Theta_3} + mgs \cos \alpha$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{=: U_{\text{eff}}(\alpha)}.$$

Qualitatives zur Lösung:

Das effektive Potential  $U_{\text{eff}}(\alpha)$  kann skizziert werden. Wegen  $1/\sin^2\alpha$  divergiert es bei  $\alpha \rightarrow 0, \pi$ :



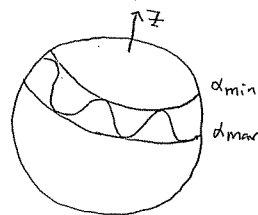
Die Bewegung zwischen  $\alpha_{\text{min}}$  und  $\alpha_{\text{max}}$  heisst „Nutation“.

Gleichzeitig findet auch eine „Präzession“ um die z-Achse statt, durch die Komponente  $\vec{\omega} = \dots + \dot{\phi} \vec{e}_z$ .

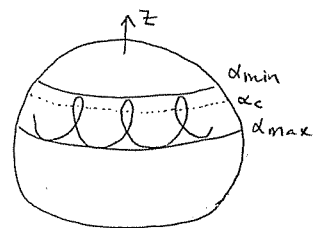
Aus Seite 15:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\alpha}{\Theta_1 \sin^2\alpha}$$

Falls  $|p_\phi| > |p_\psi|$ , hat  $\dot{\phi}$  ein bestimmtes Vorzeichen; sonst ändert sich die Richtung der Präzession wegen Variationen von  $\alpha$ :



$|\dot{\phi}| \neq 0$



$\dot{\phi}$  hat Nullstellen beim  $\alpha_c$

Crosscheck:

Keine Drehbewegung um die z- und z'-Achsen

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \dot{\psi} = 0 \Rightarrow p_\phi = p_\psi = 0$$

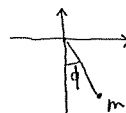
$$\Rightarrow E = \frac{\Theta_1}{2} \dot{\alpha}^2 + mgs \cos\alpha$$

Dies entspricht dem Fall des Pendels aus Seite 10, bzw.

$$T = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2, \quad U = -mgR \cos\phi,$$

wobei  $\Theta_1 \leftrightarrow mR^2$  und der Winkel anders definiert war:

Seite 10:



Hier:

