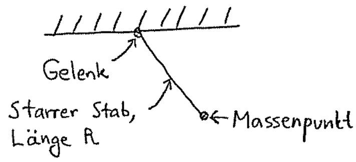
1.3 Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen sind Einschränkungen der Bewegung, die sich durch Gleichungen der Form

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad , \qquad \alpha = 1, \dots, n$$

beschreiben lassen. Wenn keine Geschwindigkeiten in f_α auftauchen, werden die Zwangsbedingungen „holonom" genannt.
(ohne Zeit: „skleronom" = starr ; mit Zeit: „rheonom" = fliessend)

Beispiele : (i) Pendel

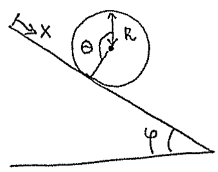


Ursprung sei beim Gelenk, Schwingung in (y,z)-Ebene.

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2+z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = y^2+z^2-R^2 \\ f_2 = x \end{cases}$$

(ii) Reifen auf Ebene mit Reibung



$$\Rightarrow \quad x = R\theta$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = x - R\theta$$

Um die Zwangsbedingungen zu erzwingen wirken Kräfte auf die Massenpunkte, die sogenannten Zwangskräfte. Behandlung solcher Systeme kann mit Newtonschen Gesetzen sehr mühsam sein.

Im Lagrange-Formalismus („Rezept")

(a) Führe $s = 3N - n$ verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \dots, q_s$ ein, die die Konfigurationen, die die Zwangsbedingungen erfüllen, parametrisieren.

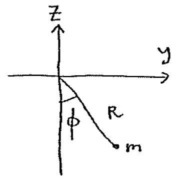
(b) Drücke die Lagrange-Funktion $L = T - U$ durch $q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ aus. Dabei enthält U nur die Beiträge, die nicht die Zwangskräfte verursachen.

(c) Löse die Euler-Lagrange-Gleichungen, $\frac{\partial L}{\partial q_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)$, $a = 1, \dots, s$.

Man braucht sich also um die Zwangskräfte nicht zu kümmern!

Beispiele
(Seite 9)

(i) Pendel



(a) $q := \phi \quad (s=1)$
$y = R\sin\phi$
$z = -R\cos\phi$

(b) $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2$

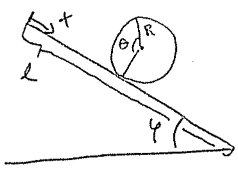
$U = mgz = -mgR\cos\phi$

$L = T - U = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2 + mgR\cos\phi$

(c) $\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgR\sin\phi \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi}$

$\Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\sin\phi$

(ii) Reifen auf Ebene



(a) $q := x$
$\theta = \frac{x}{R}$ $\qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$

(b) $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 = m\dot{x}^2$

$U = mg(\ell - x)\sin\varphi$

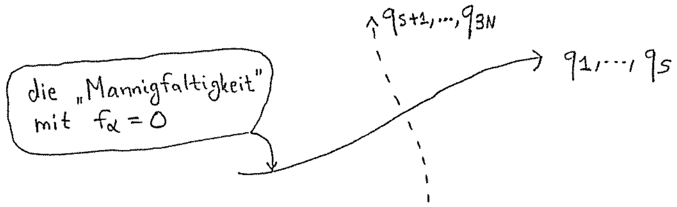
$L = T - U = m\dot{x}^2 - mg(\ell - x)\sin\varphi$

(c) $\frac{\partial L}{\partial x} = mg\sin\varphi \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\varphi$

Begründung des Rezepts (einfach aber nicht einfach zu verstehen!)

Betrachte System mit allen 3N Koordinaten.
Diese seien wie folgt eingeführt:



Es gilt: $\quad f_\alpha(q_1, \dots, q_s; \underbrace{0}_{q_{s+1}}, \dots, \underbrace{0}_{q_{3N}}) = 0 \quad \forall\; \alpha = 1, \dots, n.$

Und folglich auch: $\left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a}\right|_{f_\alpha = 0} = 0\,, \quad a = 1, \dots, s.$

→

Definiere $L' := L + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha f_\alpha$, und betrachte die „Lagrange-Multiplikatoren" $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ als neue Koordinaten, so dass es insgesamt $3N + n$ verallgemeinerte Koordinaten gibt.

Es folgt: (1) Euler-Lagrange mit λ_α:

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_\alpha} = f_\alpha = 0 . \qquad \text{OK!}$$

weil $\dot{\lambda}_\alpha$ nicht auftaucht

(2) Euler-Lagrange mit $q_{s+1}, \ldots, q_{3N}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_a} + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a} \quad , \; a = s+1, \ldots, 3N .$$

Diese erlauben die Bestimmung von λ_α.
Man kann hieraus auch die Zwangskräfte identifizieren:

$$\underset{\text{„}m_a \ddot{q}_a\text{"}}{\underset{\uparrow}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)}} = \underset{-\frac{\partial U}{\partial q_a}}{\underset{\uparrow}{\frac{\partial L}{\partial q_a}}} + \underset{\text{Zwangskräfte}}{\underset{\uparrow}{\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a}}}$$

(3) Euler-Lagrange mit $q_1, \ldots, q_s$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_a} + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \underbrace{\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_a}}_{\substack{\text{verschwindet} \\ \text{laut Seite 10!}}}$$

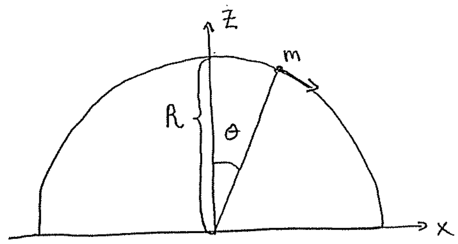
$$= \frac{\partial L}{\partial q_a} \quad , \qquad a = 1, \ldots, s .$$

Zusammenfassung:

Wenn die Koordinaten $q_1, \ldots, q_s$ so gewählt worden sind, dass $f_\alpha = 0 \; \forall \alpha$ gilt, kann man in der Tat direkt vom Schritt (3) ausgehen. $\Rightarrow \square$.

— . —

Beispiel:



Für welchen θ verlässt der Massenpunkt die Kugeloberfläche?

(a) Wahl der Koordinaten

Benutze Kugelkoordinaten r, θ, mit $\begin{cases} x = r \sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$.

Zwangsbedingung: auf der Oberfläche gilt $f := r - R = 0$.

(b) Lagrange-Funktion

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$U = mgz = mgr\cos\theta$$

$$L' = T - U + \lambda f$$

(c) Löse Euler-Lagrange wie auf Seite 11 $\left(\{q_1,\dots,q_S\} = \theta;\ \{q_{S+1},\dots,q_{3N}\} = r\right)$

(1) $f = 0 \Rightarrow r = R$

(3) $\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$; $\frac{\partial U}{\partial\theta} = -mgR\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta$

(2) $$\underbrace{\frac{d}{dt}m\dot{r}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\dot{r}}\right)} = \underbrace{mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta}_{\frac{\partial(T-U)}{\partial r}} + \underbrace{\lambda}_{\lambda\frac{\partial f}{\partial r}}$$

Aus (3): $\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \quad |\ \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = -\frac{g}{R}\frac{d}{dt}\cos\theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{R}\cos\theta + \text{Konstante}.$$

$$\dot{\theta} = 0 \text{ für } \theta = 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta).$$

Aus (2): $\dot{r} = 0$ wegen $r = R$

$\dot{\theta}^2$ von oben

$$\Rightarrow \lambda = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = mg\left(-2 + 2\cos\theta + \cos\theta\right)$$

Zwangskraft: $F_r = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = mg\left(3\cos\theta - 2\right)$.

Massenpunkt verlässt Oberfläche wenn $F_r = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$$