1.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Eines der wichtigsten Vorteile des Lagrange-Formalismus liegt darin, dass der enge Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen deutlich wird.

(i) Energie-Erhaltung als Konsequenz von Invarianz unter Zeittranslationen

Invarianz unter Zeittranslationen, bzw. Homogenität in der Zeit, heisst, dass die Lagrange-Funktion L nicht explizit von t abhängt:

$$L = L(q, \dot{q}).$$

Dann gilt:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a \right)$$

$$\overset{\text{Euler-Lagrange}}{=} \sum_a \left(\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right] \dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a \right).$$

Setzt man alles auf derselben Seite der Gleichung, erhält man

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \text{mit} \qquad E := \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L.$$

Es bleibt zu prüfen, dass dies mit der üblichen Definition der Energie übereinstimmt. Für $L = T - U$, mit

$$T := \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b,$$

erhalten wir

$$E = \sum_c \dot{q}_c \frac{\partial}{\partial \dot{q}_c} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \underbrace{\dot{q}_a \dot{q}_b}_{\delta_{ac} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{bc}} - U(q) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + U(q)$$

$$= \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + U(q)$$

$$= T + U \qquad \text{ok!}$$

(ii) Erhaltung des verallgemeinerten Impulses als Folge von räumlicher Translationsinvarianz

Invarianz heisst jetzt, dass L keine Abhängigkeit von einer bestimmten Koordinate, q_α, aufweist: $L = L(q_1, \dots, \hat{q}_\alpha, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$.

„nicht da"

Man nennt q_α eine zyklische Koordinate : L ist invariant unter $q_\alpha \to q_\alpha + \ell$.

Euler-Lagrange: $$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}_{=:\, p_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 .$$

$=: p_\alpha$ = der zu q_α gehörige verallgemeinerte Impuls bzw. zu q_α kanonish konjugierter Impuls.

Beispiel: N Massenpunkte, nur Zentralkräfte, $U = \sum_{a \neq b} U_{ab}(\vec{x}_a - \vec{x}_b)$.

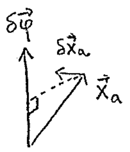
Wähle als Koordinaten $\vec{x}_1$; $\vec{x}_{a1} := \vec{x}_a - \vec{x}_1$, $a = 2, \dots, N$.

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^{\,2} + \sum_{a=2}^{N} \frac{m_a}{2}\left(\dot{\vec{x}}_1 + \dot{\vec{x}}_{a1}\right)^2 - \sum_{a \neq b} U_{ab}(\vec{x}_{a1} - \vec{x}_{b1})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1^i} = m_1 \dot{x}_1^i + \sum_{a=2}^{N} m_a\left(\dot{x}_1^i + \dot{x}_{a1}^i\right) = \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{x}_a^i = \text{Gesamtimpuls}.$$

(iii) Drehimpulserhaltung als Konsequenz von Isotropie

Invarianz unter Drehungen



$$\delta\vec{x}_a := \delta\vec{\varphi} \times \vec{x}_a$$

$$0 = \delta L = \sum_{a,i}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a^i}\delta x_a^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}\delta \dot{x}_a^i\right)$$

Euler-Lagrange

$$\overset{\text{Euler-Lagrange}}{=} \sum_{a,i}\left(\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}\right]\delta x_a^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i}\delta \dot{x}_a^i\right)$$

$$= \sum_a \left(\dot{\vec{p}}_a \cdot \delta\vec{x}_a + \vec{p}_a \cdot \delta\dot{\vec{x}}_a\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_a \vec{p}_a \cdot \delta\vec{x}_a$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_a \vec{p}_a \cdot \left(\delta\vec{\varphi} \times \vec{x}_a\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_a \delta\vec{\varphi} \cdot \left(\vec{x}_a \times \vec{p}_a\right)$$

Drehung zeitunabhängig

$$\overset{\text{Drehung zeitunabhängig}}{=} \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt}\sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a \qquad \forall\, \delta\vec{\varphi}$$

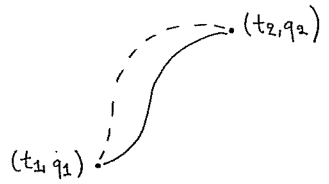
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a = \vec{0} .$$

—— ∘ ——

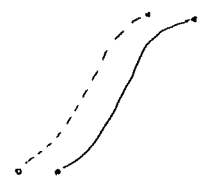
1882 - 1935

Noether-Theorem

Die bisherigen Erhaltungssätze sind alle Spezialfälle eines allgemeinen Satzes, entdeckt von Emmy Noether 1918.



$\delta S = 0$ mit fixierten Randbedingungen $\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen



$\delta S = 0$ auch für Translationen, Drehungen, usw $\Rightarrow$ Noether-Theorem

Es ist nicht leicht, den intuitiv „globalen" Charakter dieser Invarianzen in eine lokale Form umzuschreiben. Wir starten mit einem unvollständigen Argument.

Betrachte Transformation $q_a \to q_a' := q_a + \varepsilon Q_a \, , \quad \varepsilon \ll 1$

„Generator" einer Koordinatentransformation

Invarianz heisst:

$$\delta L := L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \frac{df}{dt} + O(\varepsilon^2) \, .$$

Kann erlaubt werden! (vgl. Seite 4)

Auf der anderen Seite:

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \varepsilon Q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \varepsilon \dot{Q}_a \right)$$

Euler-Lagrange

$$\stackrel{\downarrow}{=} \sum_a \left(\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right] \varepsilon Q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \varepsilon \dot{Q}_a \right) = \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} Q_a \right) \, .$$

Subtrahiere Gleichungen

$$\Rightarrow \varepsilon \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} Q_a - f \right)}_{=: J \text{ „Noether-Strom"}} = 0 \quad \forall \varepsilon \, .$$

Beispiele:

* räumliche Translationen. Sei q_α zyklisch $\Rightarrow \begin{cases} Q_a = \delta_{a\alpha} \\ \dot{Q}_a = 0 \\ f = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha$$

* zeitliche Translationen. Jetzt ist $q_a' = q_a(t + \varepsilon) = q_a + \varepsilon \dot{q}_a \Rightarrow Q_a = \dot{q}_a$

Und auch $\delta L = L|_{t+\varepsilon} - L|_t = \varepsilon \frac{dL}{dt} \Rightarrow f = L$.

$$\Rightarrow J = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L = E \, .$$

Seite 5

Bemerkungen

* Eine wichtige Eigenschaft von Erhaltungsgrössen ist ihre Additivität: falls es zwei Untersysteme A, B gibt, die mit einander nicht wechselwirken, d.h. $L = L_A + L_B$, so sind Noether-Ströme der Form $J = J_A + J_B$, weil J linear in L ist.

* Zeitliche und räumliche Invarianzen sowie Drehungen implizieren Erhaltungssätze; wie ist es mit Boosts bzw. mit eigentlichen Galilei-Transformationen? (vgl. Mechanik I)

$$q_a' = q_a - \varepsilon v_a t \quad ; \quad Q_a = -u_a t \quad ; \quad \dot{Q}_a = -u_a .$$

Die Funktion f ist in diesem Fall nichttrivial, z.B. mit freien Massenpunkten gilt

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{m_a}{2} (\dot{q}_a')^2 - \frac{m_a}{2} (\dot{q}_a)^2 \right)$$

$$= \sum_a \frac{m_a}{2} \left(-2 \varepsilon v_a \dot{q}_a + \varepsilon^2 v_a^2 \right)$$

$$= \varepsilon \frac{df}{dt} + O(\varepsilon^2) \, , \quad f = - \sum_a m_a u_a q_a .$$

Für den Noether-Strom erhalten wir

$$J = \sum_a \Big\{ \underbrace{m_a \dot{q}_a}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}} \underbrace{(-v_a t)}_{Q_a} + \underbrace{m_a u_a q_a}_{-f} \Big\} = \sum_a m_a u_a (q_a - \dot{q}_a t) .$$

Bei freien Massenpunkten ist dies in der Tat konstant ($\dot{J} = 0$), der Wert hat aber etwas mit Anfangsortsvektoren zu tun.

* Eine allgemeine Herleitung des Noether-Theorems wird im Kapitel 1.7 präsentiert. Sowohl die Zeitkoordinate ($t \to t' = t + \varepsilon X$) als auch die verallgemeinerten Koordinaten ($q_a(t) \to q_a'(t') = q_a(t) + \varepsilon Q_a$) können transformiert werden.

Ausgangspunkt ist die Invarianz der Wirkung*:

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \, L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') = S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q(t), \dot{q}(t), t) .$$

Noether-Strom:

$$J = \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L \right) X - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} Q_a .$$

---

* Im Prinzip könnten „Randterme" wie auf Seite 4 hinzugefügt werden, diese sind aber weitgehend in der Transformation der Zeitkoordinate schon enthalten.