1. Lagrange – Formalismus

1736–1813

1.1 Das Prinzip der kleinsten Wirkung bzw. Hamiltonsches Prinzip

1805–1865

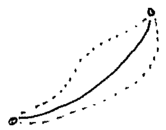
(auch Fermat, Maupertuis, d'Alembert)

1601–1665, 1698–1759, 1717–1783

Behauptung: Massenpunkt bewegt sich laut Newton II im Potential U

1643–1727

$\Longleftrightarrow$



Massenpunkt wählt Bahnkurve mit extremalem (normalerweise minimalem) Wert einer Integralgrösse, genannt Wirkung.

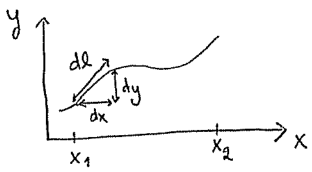
Um das Prinzip mathematisch darstellen zu können, wird eine neue Methode gebraucht.

Variationsrechnung: Ein „Funktional" sei eine Abbildung $V \to \mathbb{R}$; $y \mapsto F[y]$, wobei V ein Raum von Funktionen ist (vgl. MMP III). Die Funktionen seien reell, stetig, differenzierbar.

Beispiele:

(i) $F[y] = y(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, y(x) \, \delta(x-x_0)$.

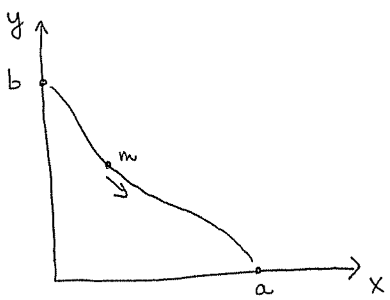
(ii) $F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, f(y(x), y'(x), x)$, mit Funktion f.



(iii) Länge einer Bahnkurve:

$$l = \int dl = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, .$$

(iv) Laufzeit im homogenen Schwerefeld bzw. das Brachistochronen-Problem*.



Massenpunkt ruht am Anfang; keine Reibung.

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dl}{v} = \int_0^a dx \, \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x)} \, .$$

Aus Energie-Erhaltung folgt

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg\,(b-y) \Longleftrightarrow v = \sqrt{2g\,(b-y)}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a dx \, \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}} \, .$$

---

* brachistos = kürzeste ; chronos = Zeit.
Problem wurde von Johann Bernoulli (1667–1748) vorgeschlagen, und von mehreren Wissenschaftlern, wie Newton, gelöst. Der ältere Bruder Jakob (1655–1705) hat für seine Lösung die Variationsrechnung entwickelt.

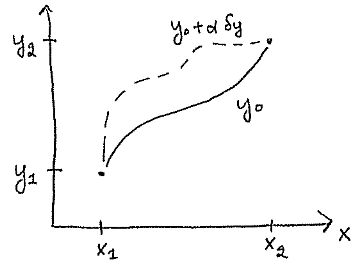
Extremalisierung eines Funktionals

Das Funktional $F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y, y', x)$ habe bei der Funktion y_0 ein Extremum.

Sei $\delta y(x)$ eine beliebige (stetige, differenzierbare) Funktion mit $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$.

Wenn wir jetzt $F[y_0 + \alpha\, \delta y]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, als Funktion von α betrachten, dann muss $\left.\frac{dF}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ gelten, und zwar für alle $\delta y(x)$.

Wir erhalten:



$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_0 + \alpha\,\delta y,\, y_0' + \alpha\,\delta y',\, x)$$

$$\overset{\text{Setze } \alpha \to 0}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y' \right]_{y = y^0} .$$

Partielle Integration im zweiten Term:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\,\delta y}{dx} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y \right) - \delta y\, \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta y \left(-\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0, \text{ da } \delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0.}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dF}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta y(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] = 0.$$

Dieses Integral muss für $\forall\, \delta y(x)$ verschwinden, insbesondere auch wenn $\delta y(x)$ nur in einer kleinen Umgebung vom bestimmten x ungleich null ist.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \forall x}$$

„Euler – Gleichung"
(1707-1783)

Für N Funktionen y_a, $a = 1, \dots, N$, erhält man N Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_a} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_a'} \right) = 0 \quad \forall x, a.$$

Beispiel: Brachistochronen-Problem, d.h. $f = \dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{b-y}}$.

Eine direkte Anwendung der Euler-Gleichung ergibt längere Ausdrücke, aber weil f keine explizite x-Abhängigkeit aufweist, finden wir

$$\frac{d}{dx}\left[y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right] = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \overset{\text{Euler!}}{y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)} \underbrace{- y' \frac{\partial f}{\partial y} - y'' \frac{\partial f}{\partial y'}}_{-\frac{df}{dx}} = 0 .$$

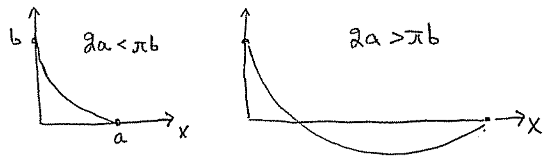
$$\Rightarrow \quad y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{Konstante} = \text{„ein erstes Integral der Euler-Gleichung"}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}} - \frac{1+(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{b-y}} = \text{Konstante}$$

$$\Rightarrow \quad [1+(y')^2][b-y] = \text{Konstante}' .$$

Ohne Beweis: Lösung kann als $x(\phi) = A(\phi - \sin\phi)$, $b - y(\phi) = A(1-\cos\phi)$ parametrisiert werden, mit $\text{Konstante}' = 2A$ und $y' = \dfrac{dy/d\phi}{dx/d\phi}$.
Dies ist eine „Zykloide".

(Vgl. Aufgabe 1.1)



Hamiltonsches Prinzip

Das System wird durch verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \dots, q_s$ beschrieben, mit s „Freiheitsgraden". Diese brauchen nicht kartesisch zu sein! Für N Massenpunkte ist $s = 3N$, z.B.

$$\{q_i\} = \{x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N\} \quad \text{oder}$$
$$\{q_i\} = \{r_1, \theta_1, \varphi_1, \dots, r_N, \theta_N, \varphi_N\} .$$

Die Zeitableitungen $\dot q_1, \dots, \dot q_s$ werden verallgemeinerte Geschwindigkeiten genannt. Wir bezeichnen $q := (q_1, \dots, q_s)$ und $\dot q := (\dot q_1, \dots, \dot q_s)$.

Lagrange-Funktion: $L(q, \dot q, t) \in \mathbb{R}$ (L statt f, q statt y, t statt x)

Wirkung: $S[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot q, t)$.

Hamiltonsches Prinzip: $\delta S = 0$ (d.h. S extremal).

Kombiniert man $\delta S = 0$ mit Euler-Gleichung, erhält man

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad \forall t, a}$$ „Euler-Lagrange-Gleichungen"

Diese sind Differenzialgleichungen der 2. Ordnung, genau wie Newton II.

Bemerkungen : (i) Die Funktion L ist nicht eindeutig. Denn:

$$L' := L + \frac{df}{dt} \quad ; \quad f = f(q,t)$$

$$\Rightarrow \quad S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{df}{dt} = S + f(q_2,t_2) - f(q_1,t_1).$$

Die zusätzlichen Terme bleiben bei der Variation $q \to q + \delta q$, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, unverändert $\Rightarrow$ sie haben keinen Einfluss auf die Euler-Lagrange-Gleichungen.

(ii) Das Prinzip an sich ist sehr allgemein; letztendlich wurde bis jetzt nichts über die Form von L gesagt.

Behauptung: Für Massenpunkte im konservativen Kraftfeld können wir $L := T - U$ wählen, wobei $\vec{x}_a \leftrightarrow q$, $\dot{\vec{x}}_a \leftrightarrow \dot{q}$,

$$T := \sum_a \frac{m_a \dot{\vec{x}}_a^2}{2}, \quad U := U(\{\vec{x}_a\}).$$

Beweis:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ai}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{ai}} = m_a \dot{x}_{ai}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ai}} = m_a \ddot{x}_{ai}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ai}} = -\frac{\partial U}{\partial x_{ai}}$$

Euler-Lagrange

$$\Rightarrow \quad m_a \ddot{x}_{ai} + \frac{\partial U}{\partial x_{ai}} = 0 \quad \forall a, i, t$$

$$\Leftrightarrow \quad m_a \ddot{\vec{x}}_a = -\nabla_a U \quad \forall a, t$$

Hier haben wir genau die Form von Newton II $\Rightarrow \square$.