

Übungen zu Mechanik I <b>Blatt Nr. 9</b>
--

[ Tutorien 2.5. und 6.5., Abgabe 13.5. ]

**Aufgabe 1: Addition von Geschwindigkeiten.** Das System  $\Sigma'$  bewege sich bzgl.  $\Sigma$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{u} = u\vec{e}_1$ . Laut Galilei-Transformation wäre die Beziehung der im  $\Sigma'$  und  $\Sigma$  gemessenen Geschwindigkeiten  $v', v$  (entlang  $\vec{e}_1$ )  $v' = v - u$ .

(a) Zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformation zu der Beziehung

$$v' = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}$$

führt. (3 Punkte)

(b) Checken Sie, ausgehend von dieser Formel, dass die Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen als  $c$  gemessen wird [d.h.  $v = c \Rightarrow v' = c$ , und umgekehrt]. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass aus  $|v| < c$  und  $|u| < c$  auch  $|v'| < c$  folgt. (3 Punkte)

**Aufgabe 2: Rücktransformation.** Eine Lorentz-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen wird als bekannt vorausgesetzt, und sei durch eine Drehachse  $\vec{n}$ , einen Drehwinkel  $\phi$ , und eine Boostgeschwindigkeit  $\vec{u}$  parametrisiert, z.B. als  $\Lambda = \Lambda_{\vec{n}, \phi} \Lambda_{\vec{u}}$ . Wie lautet die zugehörige Rücktransformation? (4 Punkte)

**Aufgabe 3: Rapidität.** Die Rapidität  $\psi$  wird als  $\psi = \text{artanh}(u/c)$  definiert.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Lorentz-Transformation damit in der eleganten Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (1)$$

schreiben lässt. (3 Punkte)

(b) Verifizieren Sie anhand Gleichung (1), dass  $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$  gilt. (3 Punkte)

**Aufgabe 4:** Betrachten Sie in einem Inertialsystem  $\Sigma$  zwei Ereignisse auf der  $x$ -Achse mit den Koordinaten  $(t_1, x_1) = (5 \text{ s}, 3 \text{ m})$  und  $(t_2, x_2) = (5 \text{ s}, 8 \text{ m})$ .

(a) Was sind die Koordinaten dieser Ereignisse in einem System  $\Sigma'$ , das sich relativ zum  $\Sigma$  mit der Geschwindigkeit  $c/2$  in positive  $x$ -Richtung bewegt? [Es ist insbesondere zu bemerken, dass  $t_1 = t_2$  aber  $t'_1 \neq t'_2$ .] (3 Punkte)

(b) Verifizieren Sie explizit die Gültigkeit der Formel (3 Punkte)

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 .$$