

Übungen zu Mechanik I Blatt Nr. 5
--

[Tutorien 28.3. und 4.4., Abgabe 8.4.]

Aufgabe 1: (jeweils 2 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass für das Kepler-Problem mit $U(r) = -\alpha/r$ der Lenzsche Vektor $\vec{M} := \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \vec{r}/r$ eine „verborgene“ Erhaltungsgröße ist. [\vec{M} zeigt in Richtung des Perihels.]
- (b) Wählen Sie die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = r_0 \vec{e}_x$, $\dot{\vec{r}}(0) = v_0 \vec{e}_y$. Verwenden Sie die Erhaltung von Drehimpuls und Lenzischem Vektor um die Gleichung

$$y^2 = \lambda(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda(\lambda - 1)r_0x + \lambda^2 r_0^2, \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

mit $\lambda = mr_0 v_0^2 / \alpha$ für die Bahnkurve herzuleiten.

- (c) Für welche Werte der Parameter erhalten Sie Parabel, Kreis, Gerade, Hyperbel und Ellipse?

Aufgabe 2: (jeweils 3 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die in Polarkoordinaten definierte Kurve $\rho = p/(1 + e \cos \varphi)$ für $e \neq 1$ in geeignet gewählten kartesischen Koordinaten durch $(x/a)^2 \pm (y/b)^2 = 1$ beschrieben werden kann (mit $a, b > 0$). Das obere bzw. untere Vorzeichen entspricht dem Fall $e < 1$ bzw. $e > 1$. Geben Sie a und b als Funktionen von p und e an.
- (b) Zeigen Sie, dass für den Fall einer gebundenen Bewegung für die Umlaufzeit τ die Relation $c^3/\tau^2 = \alpha/(4\pi^2\mu)$ gilt, wobei $c = \max\{a, b\}$ (3. Keplersches Gesetz).

Aufgabe 3 (Virialsatz): Ein Planet führe im Zentralpotential $U(r) = -\alpha/r$ eine periodische Bewegung durch (Periode τ). Zeigen Sie, dass für den Mittelwert der kinetischen Energie

$$\langle T \rangle := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt T(t)$$

und den entsprechend definierten Mittelwert der potentiellen Energie die Beziehung

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

gilt. (6 Punkte)

Aufgabe 4: Betrachtet wird das Potential $U(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha = Gm_1m_2$, und der Spezialfall der kreisförmigen Bahnkurven (Exzentrizität = 0).

- (a) Berechnen Sie den Bahnradius als Funktion der Umlaufzeit. (3 Punkte)
- (b) Auf welchem Bahnradius fliegen geostationäre Satelliten um die Erde? (3 Punkte)