Übungen zu Mechanik I **Blatt Nr. 2**

[Tutorien 7.3. und 11.3., Abgabe 21.3.]

Aufgabe 1: In einem Schwimmbad rutscht jemand reibungsfrei eine spiralförmige Rutschbahn hinunter. Die Spirale hat den Radius R und drei volle Windungen auf einem Höhenunterschied h. Berechnen Sie die Trajektorie $\vec{r}(t)$ in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem. (6 Punkte) (Hinweis: Benutzen Sie Energieerhaltung.)

Aufgabe 2: (jeweils 2 Punkte)

(a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ seien konstante Vektoren. Welche Bedingungen müssen diese erfüllen, damit das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{r})$ konservativ ist?

(b) Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a}\times\vec{r}$, $\vec{a}$ konstant. Gibt es ein Potential? Falls ja, bestimmen Sie dieses.

(c) Ist das folgende ausser auf der z-Achse definierte Kraftfeld konservativ? Geben Sie ggf. ein Potential an. (Hinweis: Betrachten Sie die Arbeit $W = \int d\vec{s}\cdot\vec{F}$, entlang eines Weges, der die z-Achse umschliesst.)

$$F = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3: Betrachten Sie eine elektrische Ladung Q im homogenen elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 =$ konstant. Die Kraft auf die Ladung ist $\vec{F} = Q\,\vec{E}_0$.

(a) Ermitteln Sie $U(\vec{r})$, so dass $\vec{F}(\vec{r})$ als $\vec{F} = -\nabla U$ darstellen lässt. (2 Punkte)

(b) Welche Arbeit leistet $\vec{F}$ bei einer Verschiebung der Ladung von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$? (Sie können die Arbeit z.B. als Linienintegral $\int_C \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{F}$ entlang dem Weg C berechnen, der die beiden Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$ längs einer Geraden verbindet.) (2 Punkte)

Aufgabe 4: Betrachten Sie eine kleine Kugel der Masse m am Ende eines masselosen Pendels der Länge R, unter dem Einfluss einer konstanten Schwerkraft. Die Pendelbewegung finde in einer Ebene statt.

(a) Parametrisieren Sie die Kurve $\vec{r}(t)$ auf der sich die Masse bewegt als Funktion des Winkels $\alpha(t)$. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie als Funktion von $\alpha(t)$. (2 Punkte)

(c) Energieerhaltung liefert nun eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\alpha(t)$, welche sich mittels Separation der Variablen lösen lässt. Geben Sie das resultierende Integral an. (2 Punkte) (Sie brauchen das Integral nicht auszuführen.)

(d) Betrachten Sie kleine Winkel α und entwickeln Sie das Potential in eine Taylor-Reihe zweiter Ordnung in α. In dieser Näherung lässt sich das Integral lösen. Ermitteln Sie die Lösung. (2 Punkte)