6.6 Anwendungen [TF 39]

Relativistische Kinematik spielt in der Teilchenphysik eine bedeutende Rolle; dadurch ist das Relativitätsprinzip auch mit höchster Präzision experimentell verifiziert worden. Im Folgenden wird diese praktische Bedeutung anhand von drei Beispielen illustriert.

Beispiel 1 In der ersten Phase vom LHC wurden Protonen mit Restmasse $m = 938 \frac{\mathrm{MeV}}{c^2} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg zu einer Energie von 7 TeV beschleunigt. Hier ist $\mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV}$; $\mathrm{TeV} = 10^{12}\,\mathrm{eV}$; eV := einer Elementarladung durch Spannung 1 Volt übermittelte Energie. Was war ihre Geschwindigkeit?

Mit 4-Impuls : $p^0 = m\gamma c = \frac{E}{c}$

$$\Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{mc^2}{E} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$$

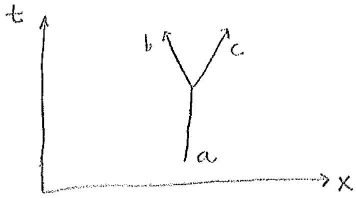
$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{938 \times 10^6}{7 \times 10^{12}}\right)^2$$

$$\approx 1 - 8{,}98 \times 10^{-9}$$

$$\approx 0{,}999999991\ldots$$



Beispiel 2

Ein instabiles Teilchen mit Masse m_a zerfällt in zwei Teilchen mit Massen m_b und m_c. Was ist die Energie von b im Ruhesystem von a?

4-Impulse im Ruhesystem von a: $P_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{0}\right) = (m_a c, \vec{0})$;

$P_b = \left(\frac{E_b}{c}, \vec{p}_b\right)$;

$P_c = \left(\frac{E_c}{c}, \vec{p}_c\right)$.

Energieimpulserhaltung: $P_a = P_b + P_c$.

Raumteil: $\vec{0} = \vec{p}_b + \vec{p}_c \Rightarrow \vec{p}_c = -\vec{p}_b =: -\vec{p}$.

Zeitteil: $m_a c = \sqrt{m_b^2 c^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_c^2 c^2 + \vec{p}^2}$.

Von hier könnte man $\vec{p}^2$ bestimmen und danach in $E_b = \sqrt{m_b^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$ einsetzen. Wegen der vielen Wurzeln wird es aber mühsam.

Direkter Weg:

$$E_b = \frac{1}{m_a} \cdot m_a c \cdot \frac{E_b}{c}$$

$$= \frac{1}{m_a} P_a \cdot P_b$$

$$= \frac{1}{2m_a}\left(-(P_a - P_b)^2 + P_a^2 + P_b^2\right)$$

$$= \frac{1}{2m_a}\left(-P_c^2 + P_a^2 + P_b^2\right)$$

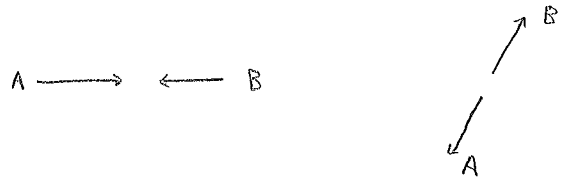
$$= \frac{1}{2m_a}\left(-m_c^2 + m_a^2 + m_b^2\right) c^2.$$

Seite 64

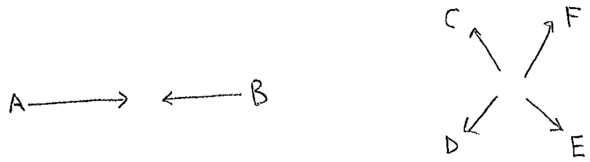
Gleicherweise: $E_c = \frac{1}{2m_a}\left(-m_b^2 + m_a^2 + m_c^2\right) c^2$.

Nachprüfung: $E_b + E_c = \frac{1}{2m_a}\left(2m_a^2\right) c^2 = m_a c^2$ Ok!

Beispiel 3 Relativistische Effekte sind wichtig in Streuung (vgl. Kap. 2.3) bei hohen Energien. In der „elastischen" Streuung bleiben die „Identitäten" der Teilchen erhalten:



In einer „inelastischen" Streuung ist dies nicht der Fall, sondern neue Teilchen können erzeugt werden:



Energie-Erhaltung verlangt $E_A + E_B = E_C + E_D + E_E + E_F$,

aber $m_C + m_D + m_E + m_F > m_A + m_B$ ist erlaubt!

(z.B. $m_{\text{Higgs}} \approx 125 \text{ GeV} \gg 2 \times m_{\text{Proton}} \approx 2 \text{ GeV}$).

Es kommt häufig vor, dass man unterschiedliche Bezugssysteme betrachten muss (vgl. Aufgabe 12.3):

$$p_A = (m_A c, \vec{0}) \qquad\qquad p_B = \left(\frac{E_B}{c}, \vec{p}_B\right) \quad ; \quad E_B = \sqrt{m_B^2 c^4 + p_B^2 c^2}$$

„Ruhesystem vom Teilchen A".

$$p_A' \qquad\qquad p_B'$$

„Schwerpunktsystem", mit $\vec{p}_A' + \vec{p}_B' := \vec{0}$.

Sei $\vec{p}_B$ gegeben, und zeige es in die (negative) x-Richtung: $\vec{p}_B = \underbrace{p_B}_{<0} \vec{e}_x$.

Was ist die Gesamtenergie $E_A' + E_B'$ im Schwerpunktsystem?

↪

(i) Explizite Lösung durch Boost

$$\begin{pmatrix} \frac{E_A'+E_B'}{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} m_A c + \frac{E_B}{c} \\ p_B \end{pmatrix}}^{p_A+p_B} = \gamma \begin{pmatrix} m_A c + \frac{E_B}{c} - \beta p_B \\ -\beta\left(m_A c + \frac{E_B}{c}\right) + p_B \end{pmatrix}$$

zweite Gleichung $\Rightarrow$ $$\beta = \frac{p_B}{m_A c + \frac{E_B}{c}}$$

$$\Rightarrow E_A' + E_B' = \gamma \left\{ m_A c^2 + E_B - \beta p_B c \right\}$$

$$= \gamma \left\{ m_A c^2 + E_B - \frac{p_B^2 c^2}{m_A c^2 + E_B} \right\} = \frac{\gamma}{m_A c^2 + E_B} \left\{ (m_A c^2 + E_B)^2 - p_B^2 c^2 \right\}$$

Hier ist $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p_B^2 c^2}{(m_A c^2 + E_B)^2}}} = \frac{m_A c^2 + E_B}{\sqrt{(m_A c^2 + E_B)^2 - p_B^2 c^2}}$

$$\Rightarrow E_A' + E_B' = \frac{1}{\sqrt{(m_A c^2 + E_B)^2 - p_B^2 c^2}} \left\{ (m_A c^2 + E_B)^2 - p_B^2 c^2 \right\}$$

$$= \sqrt{(m_A c^2)^2 + 2 m_A c^2 E_B + \underbrace{(m_B c^2)^2}_{E_B^2 - p_B^2 c^2}} \; .$$

Weil $E_B \geq m_B c^2$ gilt, ist $E_A' + E_B' \geq m_A c^2 + m_B c^2$, und weitere Teilchen können erzeugt werden.

(ii) „Intelligente" Lösung

$$E_A' + E_B' = c\left(\frac{E_A'}{c} + \frac{E_B'}{c} \right) \overset{\text{weil } \vec{p}_A' + \vec{p}_B' = \vec{0}}{=} c \sqrt{(p_A' + p_B')^2}$$

$$\overset{\text{Lorentz-Invarianz}}{=} c \sqrt{(p_A + p_B)^2} = c \sqrt{p_A^2 + p_B^2 + 2 p_A \cdot p_B}$$

$$\overset{\text{weil } \vec{p}_A = \vec{0}}{=} c \sqrt{m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2 m_A \cancel{c} \cdot \frac{E_B}{\cancel{c}}}$$

$$= \sqrt{(m_A c^2)^2 + (m_B c^2)^2 + 2 m_A c^2 E_B} \; .$$

ok!