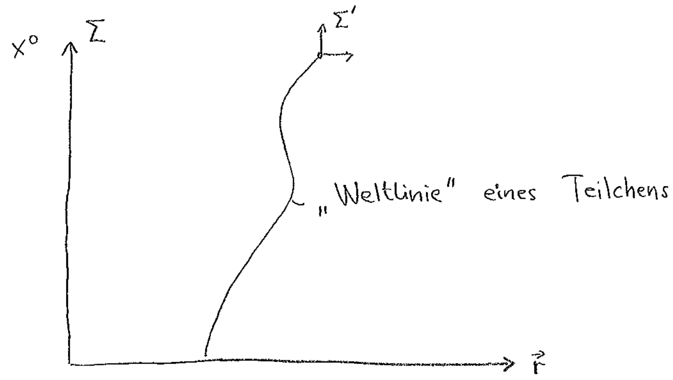
6.5 Bewegungsgleichung [TF 38]

Im Kapitel 6.4 (Seite 64) wurde ein 4-Impuls als $P := mu = m\gamma(c, \vec{v})$ definiert, und die physikalische Interpretation $P = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ wurde postuliert. Um dieses Postulat verständlicher zu machen soll jetzt gezeigt werden, dass es im nichtrelativistischen Limes vernünftige Ergebnisse liefert.

Ausgangspunkt: * Bei kleinen Geschwindigkeiten gelte Newton-II : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

* Laut Relativitätsprinzip müssen Naturgesetze Lorentz-kovariant sein (vgl. Seite 62) : $\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$.

Um diese Prinzipien benutzen zu können wird ein „momentanes Ruhesystem" definiert: (vgl. Seite 60)



System Σ' sei ein Inertialsystem (mit konstanter Boostgeschwindigkeit $\vec{u}$), in dem das Teilchen am Zeitpunkt t ruht: $\vec{u} = \vec{v}(t)$.[+]

Im System Σ' gilt am Zeitpunkt t Newton II :

$$\frac{d\vec{p}\,'}{dt'} = \vec{F}\,' .$$

Wir können t' als Eigenzeit τ interpretieren.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}\,'}{d\tau} = \vec{F}\,' .$$

Diese können als die räumlichen Komponenten einer kovarianten Gleichung betrachtet werden, falls wir noch hinzufügen, dass die Ruhemasse eines Teilchens und die Lichtgeschwindigkeit konstant seien:

$$\Rightarrow m \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}\,' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu(-\vec{v}(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}\,' \end{pmatrix}^\nu =: F^\mu .$$

$\boxed{u' = (c, \vec{v}\,') + o(\vec{v}\,'^2)}$

Rücktransformation mit Geschwindigkeit $-\vec{u} = -\vec{v}(t)$ ins Σ

[+] Dabei sollte der Ursprung des Inertialsystems Σ so gewählt werden, dass $\vec{u}t = \vec{r}(t)$ gilt.

<u>Beispiel</u>: Ein Teilchen mit Masse m fühle in seinem Ruhesystem eine konstante Kraft in x-Richtung. Welche Bewegungsgleichung erfüllt es im Inertialsystem Σ?

Um das Problem zu lösen, werden die folgenden Bausteine gebraucht:

* Beziehung von $d\tau$ und dt (Seite 60):

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

* Inverse Lorentz-Transformation (Seite 55):

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A^0 \\ A^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{m\gamma \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v^x \end{pmatrix}}_{\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{du^\mu}{d\tau}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\Lambda(-\vec{v})} \begin{pmatrix} 0 \\ F'^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma F'^x \\ \gamma F'^x \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v^x}{c} F'^x \\ F'^x \end{pmatrix}.$$

<u>Bemerkungen</u>:

* Wir haben <u>zwei</u> Gleichungen für <u>eine</u> Unbekannte, v^x. Gibt es einen Konflikt? Multipliziere die zweite Gleichung durch $\frac{v^x}{c}$, und betrachte die linke Seite:

$$\frac{v^x}{c}\frac{d}{dt}\frac{v^x}{\sqrt{1-\frac{v^{x2}}{c^2}}} \overset{v_x = -v^x}{=} \gamma\frac{v_x\dot{v}_x}{c} - \frac{v_x^2}{c}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{2v_x\dot{v}_x}{c^2}\right)}{\sqrt{}^{\,3}}$$

$$= \gamma^3\frac{v_x\dot{v}_x}{c}\left(1-\cancel{\frac{v_x^2}{c^2}}+\cancel{\frac{v_x^2}{c^2}}\right) = \frac{d}{dt}(\gamma c)$$

$\Rightarrow$ Es gibt <u>keinen</u> Konflikt.

* Wie sollte die Kombination $v^x F'^x$ interpretiert werden? Betrachte den nichtrelativistischen Limes:

$$\gamma c = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = c + \frac{1}{2}\frac{v_x^2}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v_x^4}{c^3}\right)$$

$$\Rightarrow m\frac{d}{dt}(\gamma c) \approx \frac{v^x}{c} m \frac{d}{dt} v^x \underset{\text{Newton-II}}{=} \frac{v^x}{c} F^x \qquad \text{ok!}$$

D.h. die erste Gleichung stellt eine Bewegungsgleichung für $E/c = p^0 \approx mc + \frac{m}{2}\frac{v_x^2}{c}$ dar.