6.4 Lorentz-Tensoren [TF 37]

Um die mathematischen Eigenschaften der speziellen Relativitätstheorie klar auszudrücken und die vollen physikalischen Konsequenzen davon ziehen zu können, wird eine besondere Notation eingeführt (vgl. Seite 36).
Wir sprechen von Vierer-Skalaren, -Vektoren und -Tensoren.

Notationen:

* $dx := \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$ mit $dx^0 := c\,dt$ ist ein 4-Vektor.

  Seine Komponenten sind dx^μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$.
  Griechische Indizes laufen von 0 bis 3.
  Lateinische Indizes laufen von 1 bis 3.

* Lorentz-Transformation:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \dots & \\ \Lambda^2{}_0 & & \ddots & \\ \Lambda^3{}_0 & & & \end{pmatrix}.$$

  In Matrixform: $dx' = \Lambda\, dx$.
  In Komponentenform: $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, dx^\nu$, wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde:

$$A_\nu B^\nu := \sum_{\nu=0}^{3} A_\nu B^\nu.$$

* Im Allgemeinen: $A = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vdots \\ A^3 \end{pmatrix}$ ist ein „kontravarianter" 4-Vektor, wenn sich die Komponenten A^μ als $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ transformieren.

* „Metrischer Tensor" bzw. „Minkowski-Metrik" (vgl. Seiten 36, 59):

$$(\eta_{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Wie auf Seite 36: $\eta^{\mu\nu} := (\eta^{-1})_{\mu\nu}$. Aber $\eta^{-1} = \eta \Rightarrow \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Spielregeln

* Ein **4-Skalar**, d.h. eine Lorentz-invariante Grösse, wird durch ein 4-Skalarprodukt konstruiert:

$$A \cdot B := A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu} = A^0 B^0 - \sum_{i=1}^{3} A^i B^i .$$

Insbesondere kann der invariante Abstand jetzt als

$$ds^2 = dx \cdot dx = (dx^0)^2 - \sum_i (dx^i)^2$$
$$= c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$$

ausgedrückt werden.

* Durch $\eta^{\mu\nu}$ bzw. $\eta_{\mu\nu}$ können Indizes herauf- bzw. heruntergezogen werden. Wenn die Indizes unten sind, sprechen wir von „**kovarianten**" 4-Vektoren.

* Lorentz-invariante Grössen entstehen durch die **Kontraktion** eines kontravarianten und eines kovarianten Indexes:

$$A \cdot B = \underbrace{A_\nu}_{A^\mu \eta_{\mu\nu}} B^\nu = A^\mu \underbrace{B_\mu}_{B^\nu \eta_{\mu\nu}} .$$

* **4-Tensoren** besitzen mehrere Indizes: $T^{\mu\nu}, \ldots$

* Relativitätsprinzip besagt, dass Naturgesetze eine **kovariante Form** haben: auf beiden Seiten muss dieselbe Anzahl von freien Indizes auftauchen, z.B.

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} u_\nu .$$

Lorentz-invariante Variable, z.B. Eigenzeit (vgl. Seite 60)

Ein solches Gesetz gilt in jedem Inertialsystem! Denn:

$$L^\mu = R^\mu \quad \forall \mu$$
$$\Leftrightarrow \quad L^\mu - R^\mu = 0 \quad \forall \mu \qquad \Big| \ \text{Multipliziere durch } \Lambda^\nu{}_\mu \text{ und Summiere über } \mu$$
$$\Rightarrow \quad L'^\nu - R'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu (L^\mu - R^\mu) = 0 \quad \forall \nu$$
$$\Leftrightarrow \quad L'^\nu = R'^\nu \quad \forall \nu .$$

<u>Konsequenz</u> Wie transformiert sich ein kovarianter Vektor?

$$A'_\mu = \eta_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha A^\alpha = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} A_\beta \,.$$

Wenn wir die Notation frei benutzen, liegt es nahe, dass wir die Kombination hier als

$$\Lambda_\mu{}^\beta := \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta}$$

bezeichnen. Dann gilt also $A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\beta A_\beta$.

Invarianz von Skalarprodukten impliziert

$$A'_\mu B'^\mu = \Lambda_\mu{}^\beta \Lambda^\mu{}_\alpha A_\beta B^\alpha \overset{!}{=} A_\alpha B^\alpha$$

$$\Rightarrow \Lambda_\mu{}^\beta \Lambda^\mu{}_\alpha = \delta_\alpha{}^\beta = \text{Kronecker-Symbol.}$$

Gilt dies? Schreibe in Matrixform:

$$\underbrace{\Lambda^\mu{}_\alpha}_{(i)} \underbrace{\Lambda_\mu{}^\beta}_{(ii)} = (\underbrace{\Lambda^T}_{(i)} \underbrace{\eta \Lambda \eta}_{(ii)})_\alpha{}^\beta \underset{\text{Seite 59: } \Lambda^T \eta \Lambda = \eta}{=} (\eta\eta)_\alpha{}^\beta = \left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\right]_\alpha{}^\beta$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_\alpha{}^\beta \qquad \text{ok!}$$

Physikalische Anwendungen

Zur Erinnerung (Seite 60):

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

$$\Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad \text{„Eigenzeit"}.$$

Anhand von Eigenzeit können wir eine <u>4-Geschwindigkeit</u> definieren:

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}}_{dt/d\tau} \begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}\Bigg|_{\mu\text{-Komponente}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u = \gamma(c, \vec{v})} \,.$$

Diese ist eine 4-Vektor, weil dx^μ ein 4-Vektor und $d\tau$ ein 4-Skalar ist.

Was ist der Wert des 4-Skalars $u^2 := u \cdot u$?

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2 \qquad \text{invariant!}$$

4-Impuls

Sei m die Masse eines Teilchens <u>in seinem Ruhesystem</u>. Diese ist eine Lorentz-invariante Grösse, wie die Eigenzeit. Der 4-Impuls wird als

$$p := mu = m\gamma(c, \vec{v})$$

definiert. Die „Länge" des 4-Impulses beträgt

$$p^2 = m^2 u^2 \underset{\text{Seite 63}}{=} m^2 c^2 .$$

Als <u>physikalische Interpretation</u> des 4-Impulses sei

$$p = \left(\tfrac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad ; \; E = \text{Energie} \; ; \; \vec{p} = 3\text{-Impuls}$$

vorerst als Axiom postuliert (vgl. Kap. 6.5)†.

Konsequenzen

* $p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$ (vgl. oben)

$$\Rightarrow E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = mc^2\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \underbrace{mc^2}_{\text{„Ruhenergie"}} + \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m}}_{\text{„kinetische Energie"}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{\vec{p}^4}{m^3c^2}\right)}_{\text{„relativistische Korrekturen"}} .$$

* Wie erhält man aus E und $\vec{p}$ die Geschwindigkeit?

(a) $p = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$

(b) $\nabla_{\vec{p}} E = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial p^i} \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{2} \cdot \frac{2p^i c^2}{\sqrt{\cdots}} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \nabla_{\vec{p}} E \; !$$

Dies ist wie die „Gruppengeschwindigkeit" bei Wellen.

* Energie und Impuls bleiben erhalten

$\Leftrightarrow$ <u>4-Impuls bleibt erhalten!</u>

Dies führt zu wichtigen Konsequenzen (Kap. 6.6).

---

† Eine ordentliche „Herleitung" verlangt die Betrachtung von Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern, vgl. Einstein 1905.