6.3 Lorentz-Gruppe [TF 36]

Die grundlegende Eigenschaft der Relativitätstheorie ist die Invarianz aller Naturgesetze unter Lorentz-Transformationen („Relativitätsprinzip", vgl. Kap. 6.1). Lorentz-Transformationen bestehen aus Drehungen und Boosts. Wie bei Galilei-Transformationen, bilden diese zusammen eine „Gruppe" (vgl. Kap. 1.5).

Mathematisch: Sei L die Menge aller Lorentz-Transformationen. Eine „Verknüpfung" zwischen zwei Transformationen sei Hintereinanderausführung: $\Lambda_2 \circ \Lambda_1$. Eine Gruppenstruktur ist vorhanden, falls:

(i) $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L \Rightarrow \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \in L$

(ii) „Assoziativität": $\Lambda_3 \circ (\Lambda_2 \circ \Lambda_1) = (\Lambda_3 \circ \Lambda_2) \circ \Lambda_1$.

(iii) „Einselement": $\exists\, \mathbb{1} \in L$ mit $\mathbb{1} \circ \Lambda = \Lambda \circ \mathbb{1} = \Lambda$.

(iv) „Inverse": $\forall \Lambda \in L \;\exists\, \Lambda^{-1} \in L$ mit $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \mathbb{1}$.

Physikalisch: Eine allgemeine Lorentz-Transformation ist eine beliebige Kombination von Drehungen und Boosts. Es geht um eine lineare Transformation, in der der Ursprung invariant bleibt: $\Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$.
Einselement: Drehwinkel = 0, Boostgeschwindigkeit = $\vec{0}$.
Inverse: Drehung in die umgekehrte Richtung, Boost mit Geschwindigkeit $-\vec{u}$.

Die definierende Eigenschaft der Lorentz-Transformationen ist die Invarianz des „Abstands" $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} \Rightarrow c^2 dt'^2 - dx'^T dx' = c^2 dt^2 - dx^T dx .$$

Dreiervektor als „Tabelle"

Dies garantiert insbesondere, dass lichtartige Abstände (vgl. Seite 56) als solche bleiben, d.h. dass $ds^2 = 0$ in jedem Inertialsystem gilt und damit Lichtgeschwindigkeit immer als c gemessen wird.

Wie sieht ein Lorentz-Boost in x-Richtung aus? (vgl. Seite 54)

(a) $$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A c\,dt + B dx \\ C c\,dt + D dx \end{pmatrix}$$

jetzt nur x-Koordinate

$$\Rightarrow ds^2 = (A c\,dt + B dx)^2 - (C c\,dt + D dx)^2$$
$$= (A^2 - C^2) c^2 dt^2 + (B^2 - D^2) dx^2 + 2(AB - CD) c\,dt\,dx$$
$$\overset{!}{=} c^2 dt^2 - dx^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 - C^2 = 1 \\ B^2 - D^2 = -1 \\ AB - CD = 0 \end{cases}$$

Sei $A =: \gamma$; $\gamma^2 = 1 + C^2 \geq 1 \Rightarrow \gamma \neq 0 \Rightarrow B = \frac{CD}{\gamma}$

$$\Rightarrow B^2 - D^2 = \left(\frac{C^2}{\gamma^2} - 1\right) D^2 = \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} - 1\right) D^2 = -\frac{D^2}{\gamma^2} = -1$$
$$\Rightarrow D = \pm\gamma .$$

(b) Für $u \to 0$ muss $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten. $\gamma^2 \geq 1$ impliziert also $\gamma \geq 1$ (und nicht $\gamma \leq -1$). D ist ausserdem $+\gamma$ (und nicht $-\gamma$). Folglich gilt $B = C = \pm\sqrt{\gamma^2 - 1}$.

(c) Für $dx = 0$ (zwei Ereignisse am Ursprung von Σ) muss $dx' = -u\,dt'$ gelten; dies ist eine Definition der Relativgeschwindigkeit u (Σ bewegt sich mit Geschwindigkeit $-\vec{u}$ bzgl. Σ').

$$dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} c\,dt' = A c\,dt \\ dx' = C c\,dt \end{cases} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{dx'}{c\,dt'} = -\frac{u}{c} =: -\beta .$$

(d) Aus (b): $C = \pm\sqrt{\gamma^2 - 1}$

Aus (a) & (c): $C = -\beta\gamma$

$$\Rightarrow \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1 \Rightarrow 1 = \gamma^2(1 - \beta^2)$$
$$\Rightarrow \gamma = +\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

$\gamma \geq 1$ laut (b)

Zusammenfassung: $A = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $B = C = -\beta\gamma$; $D = \gamma$; $\beta = \frac{u}{c}$

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Verifikation der Gruppenaxiome für Lorentz-Boosts (vgl. Seite 57)

(i) Bei Matrizen ist eine Hintereinanderausführung äquivalent zur Matrixmultiplikation. Eine explizite Verifikation der Eigenschaft $\Lambda_2\Lambda_1 \in L$ folgt in der Aufgabe 10.3, wir können dies aber auch im Allgemeinen tun, indem wir eine „Minkowski-Metrik" (vgl. Seite 36) einführen:

$$\eta := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{3\times 3} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^T dx$$

$$= (c\,dt \;\; dx^T) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix}$$

$$= (c\,dt \;\; dx^T)\, \eta \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (c\,dt' \;\; dx'^T)\, \eta \begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = (c\,dt \;\; dx^T)\, \Lambda^T \eta \Lambda \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} \overset{!}{=} (c\,dt \;\; dx^T)\, \eta \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta .$$

Betrachte jetzt $\Lambda_2\Lambda_1$ als Λ ; $\Lambda^T = \Lambda_1^T \Lambda_2^T$

$$\Rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \Lambda_1^T \underbrace{\Lambda_2^T \eta \Lambda_2}_{\eta \text{ weil } \Lambda_2 \in L} \Lambda_1 = \underbrace{\Lambda_1^T \eta \Lambda_1}_{\eta \text{ weil } \Lambda_1 \in L} = \eta \quad \square .$$

(ii) Assoziativität gilt im Allgemeinen für Matrixmultiplikation.

(iii) Einselement: Setze $v \to 0 \Rightarrow \beta \to 0 \Rightarrow \gamma \to 1 \Rightarrow \Lambda = \mathbb{1}$ OK!

(iv) Inverse: Setze $v \to -v \Rightarrow \beta \to -\beta$

$$\Rightarrow \Lambda \to \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ 0 & & \mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & \\ 0 & & \mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & & 0 \\ & \gamma^2(1-\beta^2) & \\ 0 & & \mathbb{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{4\times 4} .$$

$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$

— o —

Genauere Struktur der Lorentz-Gruppe

* Aus $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ folgt $(\Lambda_{00})^2 \geq 1$ (vgl. Punkt (a) auf Seite 58).
  Der Fall $\Lambda_{00} \geq 1$ entspricht „orthochronen" Lorentz-Transformationen; die entsprechende Menge wird mit $L^\uparrow$ bezeichnet.

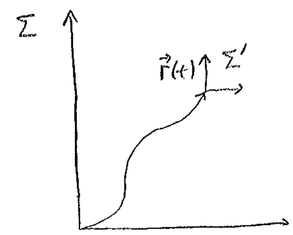
* Aus $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ folgt $\det\Lambda \det\eta \det\Lambda = \det\eta \Rightarrow (\det\Lambda)^2 = 1$.
  Der Fall $\det\Lambda = +1$ entspricht „eigentlichen" Lorentz-Transformationen; die entsprechende Menge wird mit L_+ bezeichnet.

* Allgemeine Transformation: $\Lambda = \underbrace{\Lambda_0}_{\in L_+^\uparrow} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}^n}_{\text{„Zeitumkehr"}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}^m}_{\text{„Raumspiegelung"}}$,

  wobei $n, m \in \{0,1\}$.

Eigenzeit

Die Bewegung eines Massenpunktes kann als Reihe von Lorentz-Transformationen betrachtet werden (dies wird genauer auf Seite 65 erläutert).



Im Σ: Betrachte Zeitpunkte t und $t+dt$ als zwei „Ereignisse".
Abstand: $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\,dt =: \vec{v}(t)\,dt$.

Im Σ': Zeitintervall zwischen Ereignissen sei $d\tau$; τ = „Eigenzeit".
Abstand: $d\vec{r}\,' = \vec{0}$ (Ruhesystem).

ds^2 ist invariant $\Rightarrow$ $ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$

$$\Rightarrow \quad d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}(t)}{c^2}}.$$

Daraus kann die vom bewegenden Massenpunkt gemessene Eigenzeit bestimmt werden – auch bei variierender Geschwindigkeit!
