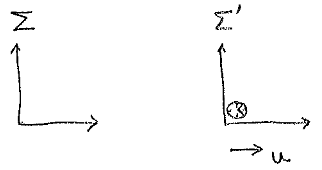
6.2 Längen- und Zeitmessung [TF35]

Wir betrachten physikalische Konsequenzen des Lorentz-Boosts aus Seite 54.



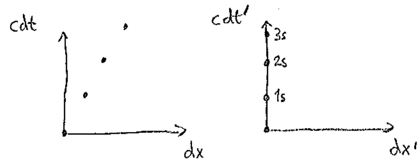
Zeitdilatation

Eine Uhr ruhe am Ursprung von Σ': $dx'=0$.

Was ist die Beziehung von dt und dt'?

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}$$



Für $dx'=0$ folgt $c\,dt = \gamma\, c\,dt'$, d.h. $dt = \gamma\, dt' > dt'$. Die bewegte Uhr geht von Σ aus gesehen langsamer.

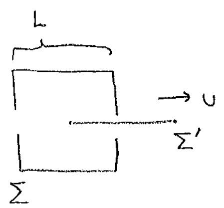
Längenkontraktion

Ein Stab ruhe in Σ', mit Ruhelänge $L'=dx'$. Was ist die Stablänge bzgl. Σ bei gleichzeitiger Messung, d.h. $dt=0$?

$$\Rightarrow \quad dx' = \gamma\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dx'}{\gamma} = \frac{L'}{\gamma} < L'.$$

Der bewegte Stab scheint bzgl. Σ verkürzt.

Beispiel: „Haus-Stab-Experiment".



Ein Haus mit zwei geöffneten Türen hat die Länge L im Σ. Ein bewegender Stab hat die Länge L im Σ'.

Laut Längenkontraktion ist die Stablänge im Σ gleich $\frac{L}{\gamma} < L$, d.h. beide Türen können geschlossen werden, so dass der Stab im Inneren bleibt.

Im Ruhesystem des Stabs ist aber die Hauslänge $\frac{L}{\gamma} < L$, so dass dies nicht möglich sein sollte. Gibt es hier einen Widerspruch?

Betrachten wir genauer was passiert. Ereignisse:

(t_1, x_1) : linke Tür wird geschlossen;
(t_2, x_2) : rechte Tür wird geschlossen.

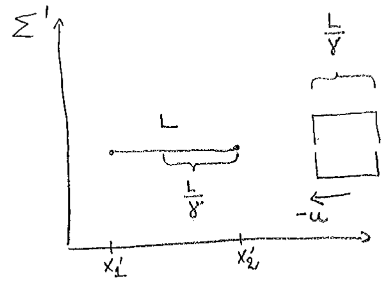
Im Haussystem Σ : $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$, $\Delta x = L$.

Beziehung: $\begin{pmatrix} c\,\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta\gamma\,\Delta x \\ \gamma\,\Delta x \end{pmatrix}$.

Im Stabsystem Σ': $\Delta t' = -\frac{\beta}{c}\gamma\,\Delta x = -\frac{\beta}{c}\,\Delta x' < 0$.

$\Leftrightarrow \quad t_2' - t_1' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1' > t_2'$.

D.h. linke Tür wird später geschlossen.



Die linke Tür bewegt sich während $\Delta t'$ den Abstand

$$|\Delta t'| \cdot u = \frac{\beta}{c} \cdot u \cdot \Delta x' \underset{(\beta = \frac{u}{c})}{=} \beta^2 \gamma \underbrace{L}_{\Delta x}.$$

Der „effektive" Abstand: $\Delta x' = \frac{L}{\gamma} + \beta^2 \gamma L$

$$= \gamma L \left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 \right)$$
$$= \gamma L \left(1 - \beta^2 + \beta^2 \right) = \gamma L > L\,!$$

<u>Begriffe:</u>

* Abstände mit $ds^2 = 0$ werden „lichtartig" genannt.
* Abstände mit $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2} > 0$ sind „zeitartig".
  In diesem Fall ist $|d\vec{r}| < c\,dt$, d.h. man kann sich mit einer Geschwindigkeit $\frac{|d\vec{r}|}{dt} < c$ zwischen den Ereignissen bewegen.
* Abstände mit $ds^2 < 0$ sind „raumartig"; entsprechende Ereignisse können einander nicht kausal beeinflussen.