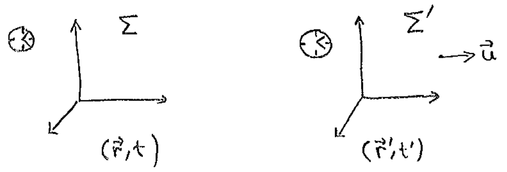
6. Relativistische Mechanik

6.1 Relativitätsprinzip [TF 34]

Wir betrachten Galilei-Transformationen wie auf Seite 13 aber ohne Translationen, d.h. Boosts ($\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$) und Drehungen ($x' = Rx$). Es gilt $(\vec{r},t) = (\vec{0},0) \Leftrightarrow (\vec{r}',t') = (\vec{0},0)$.

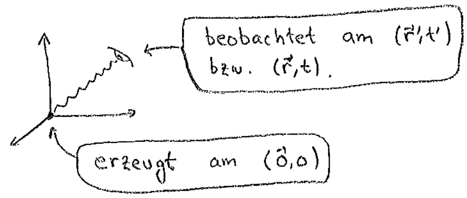


„Raum-Zeit"

„Ereignis" := ein physikalischer Prozess am $(\vec{r},t)$ bzw. $(\vec{r}',t')$.

Boosts laut Galilei:
$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d(\vec{r}-\vec{u}t)}{dt} = \vec{v} - \vec{u}.$$

Dies würde auch für Licht gelten:



$$\Rightarrow c' \neq c.$$

Ein solches Ergebnis würde aber im Widerspruch zu den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik sowie auch zu Experimenten (Michelson-Morley 1887 usw) stehen.

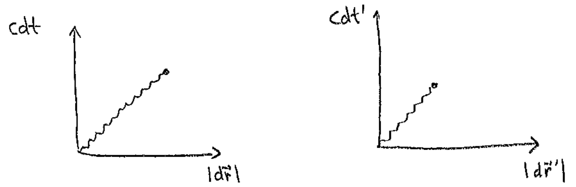
(James Clerk Maxwell 1831 – 1879)

(Albert A. Michelson 1852 – 1931) (Edward W. Morley 1838 – 1923)

Boosts laut Einstein: Für Licht gilt $c = \left|\frac{d\vec{r}'}{dt'}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |d\vec{r}'| = c\, dt' \\ |d\vec{r}| = c\, dt \end{cases} ; \quad \begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{r}_b - \vec{r}_a \\ dt &= t_b - t_a \end{aligned}$$

Zwei Ereignisse, z.B. Erzeugung und Beobachtung



Wir sagen, dass der „Abstand" $ds^2 := c^2dt^2 - d\vec{r}^2 = c^2dt'^2 - d\vec{r}'^2$ invariant sei (und zwar 0 für Licht).

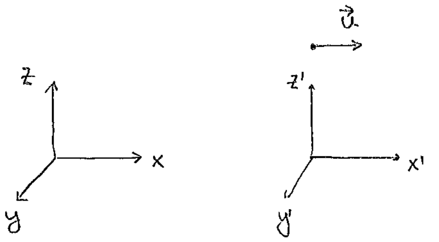
Lineare Transformationen der Form
$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix},$$
wobei Λ eine 4x4-Matrix ist, welche diese Bedingung erfüllen, heissen Lorentz-Transformationen.

(Hendrik Antoon Lorentz 1853 – 1928)

<u>Drehungen</u>, d.h. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ mit $R^T R = \mathbb{1}$, sind Lorentz-Transformationen:

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ R\,dx \end{pmatrix} \Rightarrow c^2 dt'^2 - dx'^T dx' = c^2 dt^2 - dx^T \underbrace{R^T R}_{\mathbb{1}} dx \qquad \square .$$

<u>Boosts</u> müssen verallgemeinert werden. Ein Boost in Richtung $\vec{u}$ kann als eine Hintereinanderausführung betrachtet werden: Drehung von $\vec{u}$ zum $|\vec{u}|\vec{e}_1$, gefolgt von Boost in $\vec{e}_1$-Richtung, gefolgt von Rückdrehung. Es ist also genug, einen Boost in x-Richtung zu betrachten:



$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

in senkrechten Richtungen passiert nichts

die parallelen und senkrechten Richtungen können nicht miteinander mischen

Die Koeffizienten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sind Funktionen von $u := |\vec{u}|$.

<u>Kapitel 6.3</u> (Seite 58)

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \beta := \frac{u}{c} \\ \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1. \end{cases}$$

<u>Check:</u>

$$\underbrace{(\gamma c\,dt - \gamma\beta\,dx)}_{c\,dt'}{}^2 - \underbrace{(-\beta\gamma c\,dt + \gamma\,dx)}_{dx'}{}^2 = \gamma^2 \left\{ c^2 dt^2 - 2c\beta\,dt\,dx + \beta^2 dx^2 - \beta^2 c^2 dt^2 + 2c\beta\,dt\,dx - dx^2 \right\}$$

$$= \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1!}(c^2 dt^2 - dx^2)$$

<u>Bemerkung</u>:

Drehmatrix $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det R = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Boostmatrix $B = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det B = \gamma^2(1-\beta^2) = 1.$

— ∘ —