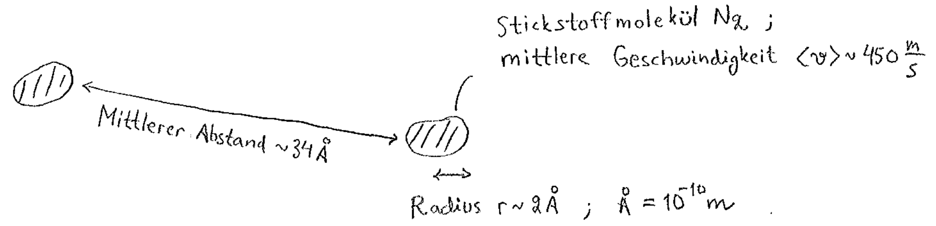
5.2 Hydrodynamik [TF 32]

Besonders interessante Feldgleichungen sind diejenigen der Hydrodynamik. Dies ist ein aktives Forschungsfeld, denn:

* es gibt sehr viele Anwendungen;
* die Grundgleichungen sind nichtlinear $\Rightarrow$ keine allgemeine Lösung ist bekannt $\Rightarrow$ theoretisch interessant (z.B. Chaos).

Wir betrachten eine Flüssigkeit oder ein Gas, z.B. Luft:



Freie Weglänge := Abstand zwischen Zusammenstössen $=: \lambda \sim \frac{(34\,Å)^3}{\pi (2Å)^2} \sim 3000\,Å$.

Kollisionszeit := Zeitintervall zwischen Zusammenstössen $=: \tau \sim \frac{\lambda}{\langle v \rangle} \sim 7 \times 10^{-10}\,s$.

Wir konzentrieren uns jetzt auf die Physik der grossen Abstände, $\Delta l \gg \lambda$, sowie der langsamen Variationen, $\Delta t \gg \tau$.

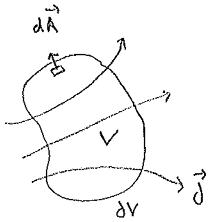
Freiheitsgrade bzw. Grundvariablen:

* Teilchendichte $n = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}}$ bzw. Massendichte $\rho := mn$.
  Diese sind Funktionen von t und $\vec{r}$.
* Strömungsgeschwindigkeit $= \vec{v}(t,\vec{r})$ = Mittelwert von mikroskopischen Geschwindigkeiten. (Für jeden Raumzeitpunkt lässt sich ein spezielles „lokales Ruhesystem" definieren, in dem $\vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{0}$ gilt.)
* Wegen der vielen Zusammenstössen herrscht lokales thermisches Gleichgewicht. D.h., im lokalen Ruhesystem können wir eine Temperatur $T(t,\vec{r})$, einen Druck $p(t,\vec{r})$, und eine Energiedichte $e(t,\vec{r})$ definieren. Es gelten die üblichen thermodynamischen Identitäten wie $E = TS - pV + \mu N$, $dE = TdS - pdV + \mu dN$.
  Die besonderen Eigenschaften der Materie bestimmen eine Zustandsgleichung, wobei einige thermodynamische Variablen als Funktionen der anderen ausgedrückt werden können.

Wir haben als Freiheitsgrade 5 Felder (z.B. $\rho, \vec{v}, p$) und brauchen dementsprechend 5 Feldgleichungen für die Beschreibung ihrer Dynamik.

Die Gleichungen haben die Form von Kontinuitätsgleichungen, $\partial_t n + \nabla\cdot\vec{j} = 0$, und beschreiben die Erhaltung von Teilchenzahl, Impuls, und Energie.

Zur Erinnerung:



Teilchenstrom durch Fläche ∂V:

$$J = \int_{\partial V} dJ = \int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{j}$$

Die abgeschlossene Teilchenzahl wird dabei kleiner:

(Carl Friedrich Gauss 1777-1855)

$$\frac{dN}{dt} = -J$$

Gausser Satz

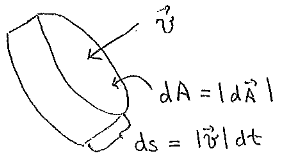
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3\vec{r}\; n(t,\vec{r}) = -\int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{j} = -\int_V d^3\vec{r}\;\nabla\cdot\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \int_V d^3\vec{r}\left(\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}\right) = 0 .$$

Dies gilt für ein beliebiges Volumenelement, auch infinitesimal klein $\Rightarrow \partial_t n + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \quad \forall t, \vec{r}$.

Wie sieht $\vec{j}$ aus?

Wähle jetzt $d\vec{A} \uparrow\downarrow \vec{v}$; $d\vec{A}\cdot\vec{j} = -dA\,|\vec{j}|$



$$\frac{dN}{dt} = -J = dA\,|\vec{j}|$$

$$\Rightarrow |\vec{j}| = \frac{dN}{dt\,dA} = \underbrace{\frac{dN}{ds\,dA}}_{\frac{dN}{dV} = n}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{|\vec{v}|} = n|\vec{v}|$$

$$\Rightarrow \vec{j} = n\vec{v} .$$

Multipliziere das Ganze noch mit Masse m, und bezeichne $\rho = mn$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho(t,\vec{r})}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho(t,\vec{r})\,\vec{v}(t,\vec{r})\right) = 0 .} \qquad (1/5)$$

Bemerkung: Die Kombination $\rho\vec{v} = mn\vec{v} = n\,m\vec{v}$ = Dichte x Impuls kann als Impulsdichte identifiziert werden.

Die Gleichungen für Impulserhaltung können aus Newton-II hergeleitet werden: dividiere $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ einfach durch Volumenelement.

<u>Linke Seite:</u>

* $\frac{m}{\text{Volumen}} \to \rho$.

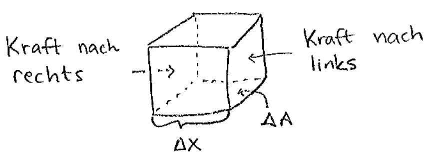
* Newton-II gilt für Massenpunkte, die sich <u>mit der Strömung</u> bewegen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} := \frac{d}{dt}\vec{v}(t,\vec{r}(t)) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{v_i} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$$

$$= \underbrace{\partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}_{\text{„konvektive Zeitableitung"}}$$

<u>Rechte Seite:</u>

* $\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \Rightarrow \text{Kraft} = \text{Druck} \times \text{Fläche}$.



Betrachte Volumenelement um $\vec{r}$: Taylor

Kraft nach rechts: $p(\vec{r} - \frac{\Delta x}{2}\vec{e}_1)\,\Delta A \approx \left(p - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)\Delta A$

Kraft nach links: $-p(\vec{r} + \frac{\Delta x}{2}\vec{e}_1)\,\Delta A \approx \left(-p - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)\Delta A$

$$\frac{\text{Gesamtkraft}}{\text{Volumen}} = \frac{-\Delta x \frac{\partial p}{\partial x_1}\Delta A\,\vec{e}_1}{\Delta x\,\Delta A} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}\vec{e}_1 .$$

Und ähnlich für die y- und z-Richtungen.

<u>Insgesamt:</u>

$$\boxed{\rho(t,\vec{r})\left(\partial_t \vec{v}(t,\vec{r}) + \vec{v}(t,\vec{r})\cdot\nabla\vec{v}(t,\vec{r})\right) = -\nabla p(t,\vec{r}).} \quad (2\text{-}4/5)$$

„Euler-Gleichung".

<u>Bemerkung:</u>

Auf der rechten Seite können auch zusätzliche Kräfte auftauchen, z.B. $\vec{f}_{\text{Schwerkraft}} = -\rho\nabla\phi$, wobei ϕ das Gravitationspotential bezeichnet; $\vec{f}_{\text{Coriolis}}$ und $\vec{f}_{\text{Zentrifugal}}$; sowie <u>Reibungskräfte</u>:

$$\vec{f}_{\text{Viskosität}} = \eta\nabla^2\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\vec{v})$$

„Scherviskosität" (η) „Dehnviskosität" (ζ)

Man spricht dann von „dissipativen Termen" bzw. „nichtidealen Flüssigkeiten". Euler-Gleichung mit $\vec{f}_{\text{Viskosität}}$ heisst <u>Navier-Stokes-Gleichung</u>.

(Claude Louis Marie Henri Navier 1785–1836) (George Gabriel Stokes 1819–1903)

Die Euler-Gleichung kann als Kontinuitätsgleichung für die Impulsdichte und Impulsstromdichte umgeschrieben werden.

Definitionen:

* $g_i := \rho v_i$ = Impulsdichte (vgl. Seite 50)
* $\pi_{ij} := p\delta_{ij} + \rho v_i v_j$ = Impulsstromdichte.

Behauptung: $\partial_t g_i + \sum_j \partial_j \pi_{ij} = 0 \quad \forall\ i \in \{1,2,3\}$.

Beweis:

$$\partial_t(\rho v_i) + \sum_j \partial_j \left(p\delta_{ij} + \rho v_i v_j \right)$$

$$= (\partial_t \rho) v_i + \rho \partial_t v_i + \partial_i p + v_i \sum_j \partial_j(\rho v_j) + \sum_j \rho v_j \partial_j v_i$$

$$= v_i \underbrace{\left[\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) \right]}_{(1/5) \Rightarrow 0} + \rho \underbrace{\left[\partial_t v_i + \vec{v}\cdot\nabla v_i \right]}_{(2\text{-}4/5) \Rightarrow -\partial_i p} + \partial_i p = 0 .$$

— · —

Uns fehlt noch die fünfte Gleichung. Es gibt hier verschiedene Möglichkeiten:

(i) In manchen Systemen gilt eine „adiabatische" Zustandsgleichung, der Form $p = p(\rho)$. Dann gibt es nur vier unabhängige Felder $(\rho, \vec{v})$, und keine zusätzlichen Gleichungen werden gebraucht.

(ii) Für ideale Flüssigkeiten kann man die Erhaltung des Entropiestroms als zusätzliche Gleichung wählen:

$$\partial_t s + \nabla\cdot(s\vec{v}) = 0 \quad , \quad s := \frac{S}{V} .$$

Die Strömung ist dann isentropisch bzw. adiabatisch und reversibel.

(iii) Logisch ist die Benutzung von Energie-Erhaltung als zusätzliche Grundgleichung, allerdings verlangt dies eine nichttriviale Herleitung, die wir in dieser Vorlesung nicht durcharbeiten können:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e \right) + \vec{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + e + p \right)\vec{v} \right] = 0 .} \qquad (5/5)$$

e = innere Energiedichte

Energiestrom enthält nicht e sondern $w := e + p = \frac{E + pV}{V}$ = Enthalpiedichte.

— ∘ — ∘ —