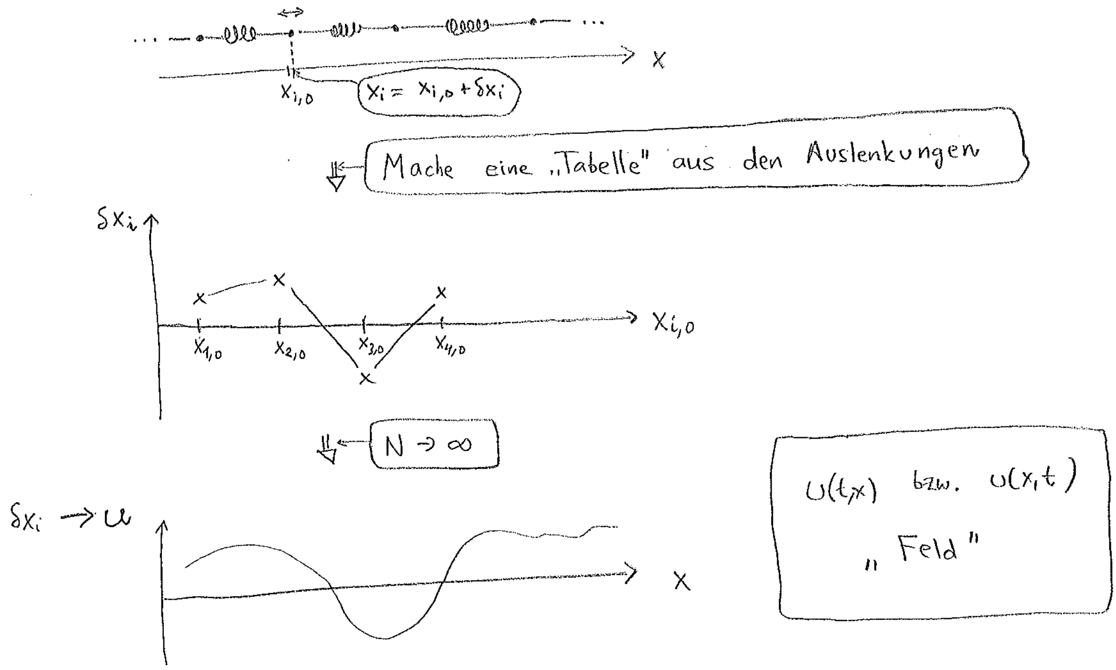
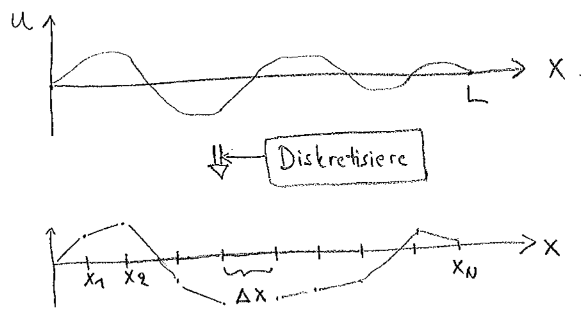
5. Kontinuumsmechanik

5.1 Saitenschwingung [TF30]

Wir betrachten kleine Schwingungen wie im Kapitel 4, nehmen aber jetzt den Limes $N \to \infty$. Die Notation muss ein wenig verbessert werden; wir tun dies anhand eines „eindimensionalen" Beispiels.

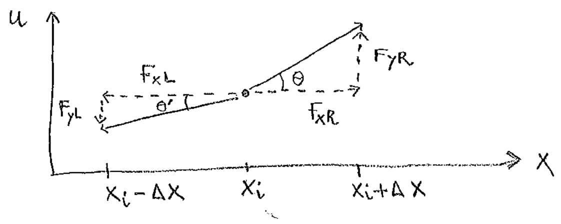


Oder wir können vom Anfang an eine Seite betrachten, fixiert zwischen $x = 0$ und $x = L$:



Masse im Intervall Δx: $\quad m = \rho\, \Delta x$.

<u>Betrachte Federkraft beim x_i:</u>



$|\vec{F}| =: P.$

Bei kleinen Auslenkungen können die Kraftkomponenten bestimmt werden:

Kraft nach rechts: $F_{xR} = P\cos\theta = P + \mathcal{O}(\theta^2)$

Kraft nach oben: $F_{yR} = \tan\theta \cdot F_{xR} = \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i)}{\Delta x}\left(P + \mathcal{O}(\theta^2)\right)$

$$\overset{\text{Taylor}}{\approx} \frac{\Delta x\, u'(x_i) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x_i)}{\Delta x} \cdot P$$

Kraft nach links: $F_{xL} = -P\cos\theta' = -P + \mathcal{O}(\theta'^2)$

Kraft nach unten: $F_{yL} = \tan\theta' F_{xL} = \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x}\left(-P + \mathcal{O}(\theta^2)\right)$

$$\approx \frac{\Delta x\, u'(x_i) - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 u''(x_i)}{\Delta x} \cdot (-P) .$$

Gesamtkraft in x-Richtung: $F_x = F_{xR} + F_{xL} \approx 0 .$

Gesamtkraft in y-Richtung: $F_y = F_{yR} + F_{yL} \approx \Delta x\, u''(x_i) \cdot P .$

Damit kann die Newtonsche Bewegungsgleichung hingeschrieben werden:

$$\underbrace{\rho \Delta x}_{m}\, \ddot{u}(x_i) = P \cdot \Delta x\, u''(x_i)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \partial_t^2 u(t,x) = \underbrace{\frac{P}{\rho}}_{=: c^2} \partial_x^2 u(t,x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\left(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2\right) u(t,x) = 0 .}$$

Die gefundene Gleichung ist eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung bzw. eine <u>Feldgleichung</u>.

Weil die Gleichung von 2. Ordnung in 2 Variablen ist, braucht man Rand- bzw. Anfangsbedingungen in beiden Variablen, z.B. $u(t,0) = u(t,L) = 0$ (fixierte Randbedingungen) und $u(0,x) = \alpha(x)$, $\dot{u}(0,x) = \beta(x)$ (Anfangsbedingungen), um eine eindeutige Lösung zu finden $\Longrightarrow$ Aufgaben 8.2 und 8.3.
