4.3 Anwendungen [TF 26]

Im Kapitel 4.2 wurde gezeigt, dass „quadratische" Systeme im Allgemeinen diagonalisiert werden können. Wir untersuchen nun, anhand von konkreten Beispielen, was dies physikalisch bedeutet.

Das Ziel ist, die Normalfrequenzen $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ zu bestimmen. Die allgemeine Betrachtung garantiert, dass diese existieren, nicht aber dass $\omega_i^2 > 0$ unbedingt gilt.

* $\omega_i^2 > 0$ $\Rightarrow$ tatsächlich eine Schwingung, wie im Kapitel 4.1.
* $\omega_i^2 < 0$ $\Rightarrow$ Instabilität der Ruhelage (Potential ist in dieser Richtung negativ gekrümmt)
* $\omega_i^2 = 0$ $\Rightarrow$ die entsprechende Richtung ist „flach"; einfache Translationsbewegung, $Q_i(t) = Q_i(0) + \dot{Q}_i(0)\,t$.

Beispiel 1 Zwei gleiche Systeme, mit Eigenkreisfrequenz ω_0, die durch eine Wechselwirkung gekoppelt sind.

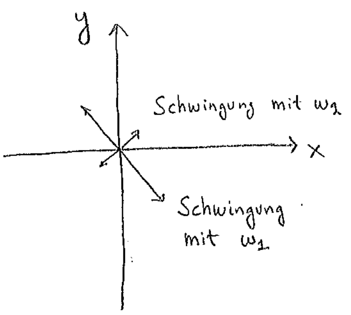
$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \; ; \quad U = \frac{m}{2}\,(x \; y)\begin{pmatrix} \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die kinetische Energie ist bereits diagonal; diagonalisiere U.

$$\det\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \lambda & \alpha \\ \alpha & \omega_0^2 - \lambda \end{pmatrix} = (\omega_0^2 - \lambda)^2 - \alpha^2 = 0$$

$$\lambda - \omega_0^2 = \pm\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha \end{cases}$$

Beide positiv für $\alpha < \omega_0^2$.



Eigenvektoren:

$$\omega_1^2: \quad \omega_0^2 x + \alpha y = (\omega_0^2 - \alpha)\,x \quad \Rightarrow \quad y = -x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2: \quad \omega_0^2 x + \alpha y = (\omega_0^2 + \alpha)\,x \quad \Rightarrow \quad y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

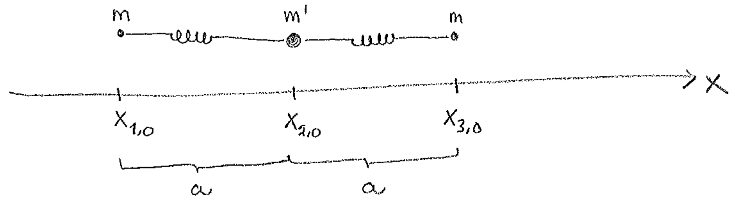
Normalkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left\{ A\cos(\omega_1 t + B) + C\cos(\omega_2 t + D) \right\}$$

„Modulierte Oszillationen" 

Beispiel 2 Dreiatomiges Molekül



$$T = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m'}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1\ \dot{x}_2\ \dot{x}_3)\begin{pmatrix} m & & 0 \\ & m' & \\ 0 & & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix},$$

$$U = \frac{k}{2}\left\{ (x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2 \right\}.$$

Schreibe $\begin{cases} x_1|_{alt} = x_{1,0} + x_1|_{neu} \\ x_2|_{alt} = x_{1,0} + a + x_2|_{neu} \\ x_3|_{alt} = x_{1,0} + 2a + x_3|_{neu} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_2 - x_1 - a)|_{alt} = (x_2 - x_1)|_{neu} \\ (x_3 - x_2 - a)|_{alt} = (x_3 - x_2)|_{neu} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \frac{k}{2}\left\{ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Schritt 2:
(vgl. Seite 42)

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x} \underset{\boxed{Q' = M^{1/2} x}}{=} \frac{1}{2}\dot{Q}'^T \dot{Q}'$$

$$U = \frac{1}{2} x^T K x \underset{\boxed{x = M^{-1/2} Q'}}{=} \frac{1}{2} Q'^T \underbrace{M^{-1/2} K M^{-1/2}}_{\text{zu diagonalisieren!}} Q'$$

Schritt 3:
(vgl. Seite 42)

$$\det\left(M^{-1/2} K M^{-1/2} - \lambda \mathbb{1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(K - \lambda M) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} k - \lambda m & -k & 0 \\ -k & 2k - \lambda m' & -k \\ 0 & -k & k - \lambda m \end{vmatrix} = 0.$$

$\rightarrow$

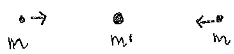
$$\Longleftrightarrow \quad (k-\lambda m)\begin{vmatrix} 2k-\lambda m' & -k \\ -k & k-\lambda m \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} -k & -k \\ k-\lambda m & 0 \end{vmatrix} = (k-\lambda m)\left\{ (2k-\lambda m')(k-\lambda m) - k^2 - k^2 \right\}$$

$$= (k-\lambda m)\left\{ \cancel{2k^2} - \lambda k(m'+2m) + \lambda^2 m m' - \cancel{2k^2} \right\}$$

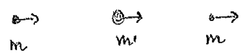
$$= (k-\lambda m)\,\lambda\,\left\{ \lambda m m' - k(m'+2m) \right\} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & =: \omega_1^2 \\ \lambda = \dfrac{k}{m} & =: \omega_2^2 \\ \lambda = \dfrac{k(m'+2m)}{mm'} = \dfrac{k}{m}\left(1 + \dfrac{2m}{m'}\right) & =: \omega_3^2 \end{cases}$$

Hier ist ω_2^2 wie eine eindimensionale Schwingung, d.h. m' ruht:



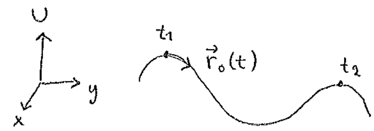
Was ist die Bedeutung von $\omega_1^2 = 0$? Gleichzeitige Bewegung!



Die Normalschwingung mit ω_3^2 lässt sich auch visualisieren [TF26].

<u>Beispiel 3</u> Die Ruhelage braucht nicht unbedingt „statisch" zu sein.

Zum Beispiel (Skizze):



Referenzlösung: $\quad m\ddot{x}_{i,0} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}\Big|_{x_i = x_{i,0}} \qquad (*)$

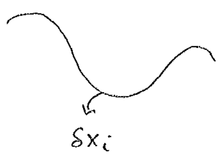
Auslenkung: $\quad x_i = x_{i,0}(t) + \delta x_i$.

Bewegungsgleichung $\quad m\ddot{x}_i = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}_0} - \sum_j \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{r}_0} \delta x_j + \mathcal{O}(\delta x)^2$

Taylor-Entwicklung

Benutze $(*)$ $\Longrightarrow$ $\quad m\delta\ddot{x}_i = -\sum_j \underbrace{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{r}_0}} \delta x_j + \mathcal{O}(\delta x)^2$

eine Matrix von „zeitabhängigen Federkonstanten".



Diesmal würden wir wahrscheinlich auch eine instabile Richtung ($\omega_i^2 < 0$) finden![†]

[†] Ausserdem gibt es eine Lösung mit $\omega_i^2 = 0$, nämlich $\delta x_i := \dot{x}_{i,0}$ (Übung).

Ein wenig Studienberatung

* Wie läuft das Studium der theoretischen Physik?

1. Semester: MMP I
2. Semester: MMP II, Mechanik I
3. Semester: MMP III, Elektrodynamik, Quantentheorie I

Mechanik I: mathematisch anspruchsvoll, begrifflich einfach

Quantentheorie I: mathematisch anspruchsvoll, begrifflich schwierig

Ziel von Mechanik I:

(Anhand interessanter Physik) $\left\{\begin{array}{l}\text{Rechenroutine}\\ \text{Problemlösen}\end{array}\right\}$ entwickeln!

* Wie läuft Mechanik I?

Vorlesung < Skript < Literatur

Vorlesung, Skript, Literatur → Übungen → Prüfung

Vorlesung → Prüfung

Denn: Es ist wichtig zu lernen, unbekannte Notationen bzw. mathematische Werkzeuge selbst zu recherchieren.

* Wie löst man Übungs- bzw. Prüfungsaufgaben?

1. Aufgabenbeschreibung durchlesen.
   —— " ——
   —— " ——
2. Skizze machen.

3. Koordinaten wählen.
4. Naturgesetze benutzen [Physik].
5. Diff. gleichung lösen [Mathematik].
6. Schmierblatt ist erlaubt!

mind. 1 Stunde / Aufgabe.