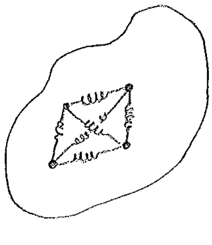
4.2 System mit vielen Freiheitsgraden [TF 25]



Im Kapitel 4.1 wurde die Schwingung einer Relativbewegung ($N=2$) betrachtet. Wir verallgemeinern die Betrachtung zu vielen gekoppelten gleichzeitigen Schwingungen.

Ausgangslage: Seien die schwingenden Abstände durch die Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ parametrisiert. Es gäbe eine Gleichgewichtslage wo das Potential minimal ist, bezeichnet mit $x_{1,0}, \dots x_{n,0}$. Wir entwickeln wieder U als Taylor-Reihe (vgl. Seite 37):

$$U(\{x_i\}) = U(\{x_{i,0}\}) + \underbrace{\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}}_{=0} (x_i - x_{i,0}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_{i,0})(x_j - x_{j,0}) + \dots$$

Bezeichnung: $K_{ij} := \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_i = x_{i,0}}$; $x_i|_{neu} := (x_i - x_{i,0})|_{alt}$.

Als Matrix ist K symmetrisch.

Die Konstante $U(\{x_{i,0}\})$ spielt in den Bewegungsgleichungen keine Rolle, und wird im Folgenden weggelassen.

Die kinetische Energie habe eine ähnliche „quadratische" Struktur:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x}.$$

Als Matrix ist auch M symmetrisch.*

Aufgabe: Weil K und M symmetrisch sind, können sie mit orthogonalen Transformationen diagonalisiert werden. Aber gleichzeitig?

Schritt 1: Sei $x' = O x$, $x = O^T x'$, so dass

$$O M O^T =: M_D = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix}$$

diagonal wird. Dann ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i')^2, \quad U = \frac{1}{2} x'^T O K O^T x'.$$

$$^* \sum_{ij} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j + M_{ji} \dot{x}_j \dot{x}_i \right) = \sum_{ij} \underbrace{\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2}}_{\text{symmetrisch!}} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

Schritt 2: Definiere neue Variablen $Q'_i := \sqrt{m_i}\, x'_i$.

Dann ist $Q' = M_D^{1/2}\, x'$ mit

$$M_D^{1/2} := \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_N} \end{pmatrix},$$

und

$$T = \frac{1}{2} \dot{Q}'^T \dot{Q}', \qquad U = \frac{1}{2} Q'^T M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2} Q'.$$

Schritt 3: Die Matrix $M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2}$ ist symmetrisch:

$$\left(M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2}\right)^T \underset{(M_D^{-1/2})^T = M_D^{-1/2}}{=} M_D^{-1/2} O K^T O^T M_D^{-1/2} \underset{K^T = K}{=} M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2}.$$

Deshalb kann sie wieder diagonalisiert werden:

$$M_D^{-1/2} O K O^T M_D^{-1/2} = \bar{O} \cdot \Omega_D \bar{O}^T,$$

$$\Omega_D := \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $Q := \bar{O}^T Q'$; $Q' = \bar{O} Q$. Dann gilt

$$T = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \bar{O}^T \bar{O} \dot{Q} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{Q}_i^2,$$

$$U = \frac{1}{2} Q^T \Omega_D Q = \frac{1}{2} \sum_i \omega_i^2 Q_i^2.$$

Zusammenfassung: Es ist in der Tat möglich, die kinetische und die potentielle Energie gleichzeitig in eine diagonale Form zu bringen. Die entsprechenden Koordinaten $\{Q_i\}$ heissen Normalkoordinaten, und die $\{\omega_i\}$ sind die Normalfrequenzen. Das ganze System benimmt sich wie eine Menge von unabhängigen (entkoppelten) „harmonischen Oszillatoren", mit ihren eigenen Kreisfrequenzen.