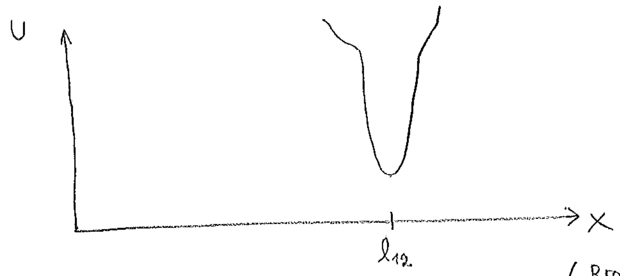
4. Kleine Schwingungen

4.1 Erzwungene Schwingungen [TF 24]

Im Kapitel 3 wurden starre Körper betrachtet. Aber kein Körper ist komplett starr: die Abstände $l_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, die als Zwangsbedingungen betrachtet wurden (vgl. Seite 29), können sich ein wenig um einen Gleichgewichtszustand bewegen. D.h. „Stäbe" sollten eher als „Federn" betrachtet werden. Dies führt zu vielen wichtigen physikalischen Konsequenzen.

Sei vorerst $N = 2$, und betrachte das Potential U als Funktion von $x = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.



(Brook Taylor 1685 – 1731)

Wir können U um l_{12} als eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$U(x) = U(l_{12}) + \underbrace{U'(l_{12})}_{0,\ \text{weil Gleichgewichtslage}}(x - l_{12}) + \frac{1}{2} U''(l_{12})(x - l_{12})^2 + \ldots$$

Newton II für die Relativbewegung:

$$\mu \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -U''(l_{12})(x - l_{12}) + \mathcal{O}(x - l_{12})^2 .$$

Der Allgemeinheit halber fügen wir eine Stokessche Reibung (vgl. Seite 5) und eine zeitabhängige externe Kraft (z.B. aus elektrischem Feld) hinzu:

$$\Rightarrow \quad \mu \ddot{x} = -\alpha \dot{x} - U''(l_{12})(x - l_{12}) + F(t) .$$

Hier wurden auch die Terme von $\mathcal{O}(x - l_{12})^2$ weggelassen.

Notation: $\quad x|_{neu} := (x - l_{12})|_{alt}$

$$2\lambda := \frac{\alpha}{\mu}$$

$$\omega_0^2 := \frac{U''(l_{12})}{\mu}$$

$$f(t) := \frac{F(t)}{\mu}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)} \quad \Rightarrow \text{ lineare inhomogene DG 2. Ordnung.}$$

Die Aufgabe ist jetzt, diese Gleichung im Allgemeinen zu lösen.

<u>Satz</u>: allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
= allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
+ spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. (Vgl. Seiten 5-6).

<u>Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung</u> ($=: x_a$)

Nehme Ansatz $x_a = Ce^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$. Löse zuerst mit $Ce^{i\omega t}$!

$$\Rightarrow \quad (-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2)\, Ce^{i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 - 2i\lambda\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

Es gibt drei Möglichkeiten:

(i) $\lambda < \omega_0 \quad \Rightarrow \quad x_a = e^{-\lambda t}\left[C e^{i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t} + C^* e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t}\right]$

$$= A e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t + \delta\right)$$

$C = \frac{A}{2} e^{i\delta}$

Zwei Integrationskonstanten

(ii) $\lambda > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega = i\lambda \pm i\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$

$$\Rightarrow \quad x_a = e^{-\lambda t}\left[C_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

Zwei Integrationskonstanten

reelle

(iii) $\lambda = \omega_0$

Von oben haben wir nur eine Lösung. Die zweite folgt durch „Variation der Konstanten":

$$x_a = C(t)e^{-\lambda t} \quad ; \quad \dot{x}_a = \dot{C}e^{-\lambda t} - \lambda C e^{-\lambda t} ;$$
$$\ddot{x}_a = \ddot{C}e^{-\lambda t} - 2\lambda\dot{C}e^{-\lambda t} + \lambda^2 C e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{C}e^{-\lambda t} - \cancel{2\lambda\dot{C}e^{-\lambda t}} + \cancel{\lambda^2 C e^{-\lambda t}} + \cancel{2\lambda\dot{C}e^{-\lambda t}} - \cancel{2\lambda^2 C e^{-\lambda t}} + \cancel{\lambda^2 C e^{-\lambda t}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = C_0 + C_1 t$$

$$\Rightarrow \quad x_a = (C_0 + C_1 t)\, e^{-\lambda t}.$$

zwei reelle Integrationskonstanten

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ($=: x_s$)

(Jean Babtiste Joseph Fourier 1768 – 1830)

Wir können $f(t)$ als eine „Fourier-Transformation" darstellen:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f_\omega \, e^{i\omega t} \quad ; \qquad f_{-\omega} = f_\omega^* \text{ weil } f(t) \in \mathbb{R}.$$

Für beliebiges ω gelte:

$$\ddot{x}_{s,\omega} + 2\lambda \dot{x}_{s,\omega} + \omega_0^2 x_{s,\omega} = \frac{f_\omega}{2\pi} e^{i\omega t}.$$

Ansatz: $\quad x_{s,\omega} = C_1 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2\right) C_1 e^{i\omega t} = \frac{f_\omega}{2\pi} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{f_\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

Integral über alle ω ergibt folglich

$$x_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} e^{i\omega t}.$$

Crosscheck:

$$\ddot{x}_s + 2\lambda\dot{x}_s + \omega_0^2 x_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \cdot \frac{f_\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} \left(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2\right) e^{i\omega t}$$

$$= f(t) \qquad \text{ok!}$$

Zusammenfassung: Für $\lambda < \omega_0$ sind die x_a „gedämpfte Schwingungen". Für $\lambda \geq \omega_0$ gibt es keine Schwingungen, nur einen exponentiellen Zerfall in der Lösung x_a.

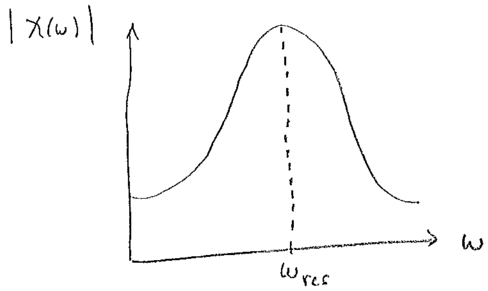
Die externe Kraft $f(t)$ führt zu weiterer Struktur. Die Funktion

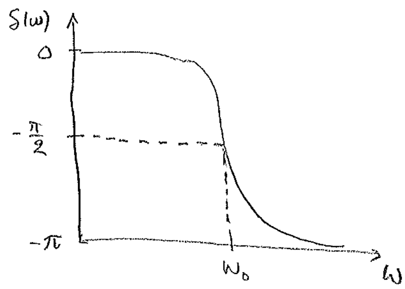
$$\chi(\omega) := \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}\; e^{i\delta(\omega)} ,$$

$$\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

wird die „dynamische Suszeptibilität" oder die „Responsefunktion" genannt. Für kleine λ kann $|\chi(\omega_0)|$ sehr gross sein; wir sprechen dann von einer „Resonanz", wobei Energie aus der äusseren Kraft sehr effizient übermittelt wird:





Bestimmung des maximalen Werts von $|\chi(\omega)|$:

$$\begin{aligned}(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2 &= \omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2 \\ &= \omega^4 + 2\omega^2\left[2\lambda^2 - \omega_0^2\right] + \omega_0^4 \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2)^2 + \omega_0^4 - (\omega_0^2 - 2\lambda^2)^2 \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2(\omega_0^2 - \lambda^2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_{res}^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2 , \quad \lambda^2 < \frac{\omega_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow |\chi(\omega_{res})| = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} \longrightarrow \infty \quad \text{für } \lambda \to 0.$$