3.3 Tensoren [TF 21]

Im Kapitel 3.2 wurde der Trägheitstensor eingeführt. Dies gibt uns den Anlass, den Begriff der Tensoren ein wenig allgemeiner zu diskutieren.

Wir betrachten eine Transformation, z.B. eine Drehmatrix R wie auf Seite 13.

* Tensor 0. Stufe: Skalar, d.h. invariant in der Transformation. (z.B. $\vec{a}\cdot\vec{b}$; Länge eines Vektors; Winkel; vgl. Seite 14)

* Tensor 1. Stufe: Vektor: $a'_i = R_{ij} a_j := \sum_{j=1}^{3} R_{ij} a_j$.

* Tensor 2. Stufe: Komponenten t_{ij} transformieren sich wie das Produkt $a_i b_j$, d.h.

$$t'_{ij} = R_{ik} R_{jl} t_{kl} \quad .$$

* Tensor n-ter Stufe: $t'_{i_1 \cdots i_n} = R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_n j_n} t_{j_1 \cdots j_n}$.

* Kontraktion: Gleichsetzen zweier Indizes und Summation.

* Summenkonvention: $t_{i_1 \ldots i \ldots i \ldots i_n} := \sum_{i=1}^{3} t_{i_1 \ldots i \ldots i \ldots i_n}$.

Besondere Tensoren sind „invariante Tensoren"; diese bleiben in jeder Transformation unverändert. Bei Drehungen gibt es zwei wichtige Beispiele:

* Kronecker-Symbol (vgl. Seite 31):

$$\delta'_{ij} := R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} = R_{ik} R_{jk} = (RR^T)_{ij}$$

$$= \delta_{ij}, \text{ falls } R \text{ orthogonal, d.h. } RR^T = \mathbb{1}.$$

* Levi-Civita-Symbol (vgl. Seite 30):

$$\varepsilon'_{ijk} := R_{im} R_{jn} R_{kp} \varepsilon_{mnp} = \det(R)\, \varepsilon_{ijk}$$

$$= \varepsilon_{ijk}, \text{ falls } R \text{ unimodular, d.h. } \det(R) = 1.$$

Vorblick: Tensoren in der Relativitätstheorie

Wenn die Struktur des Raums (bzw. der Raumzeit) „nichteuklidisch" ist, muss die Notation noch verallgemeinert werden. Bezeichnungen:

* Setze bei a_i den Index oben: $a^i|_{neu} := a_i|_{alt}$.

  Es geht um einen „kontravarianten" Vektor bzw. um einen kontravarianten Tensor 1. Stufe.

* Notation für die Transformation: $\Lambda^i{}_j := R_{ij}$.

* Führe die Einsteinsche (1879-1955) Summenkonvention ein: wenn ein Index zweimal vorkommt, einmal unten und einmal oben, wird darüber summiert.

Anhand dieser Bezeichnungen können Transformationen als

$$a'^i = \Lambda^i{}_j a^j \quad ; \quad t'^{ij} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_l t^{kl}$$

geschrieben werden.

Folglich werden auch „kovariante" Vektoren bzw. Tensoren, mit Indizes unten, definiert. Dies passiert mit Hilfe eines „metrischen Tensors", g_{ij}:

$$a_i := g_{ij} a^j \quad ; \quad t_{ij} = g_{ik} g_{jl} t^{kl} .$$

Die inverse Transformation:

$$g^{ij} := (g^{-1})_{ij} \quad , \text{ d.h. } \quad g^{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^{3} (g^{-1})_{ik} g_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \stackrel{!}{=} \delta^i{}_j .$$

Kronecker-Symbol

Jetzt gilt $a^i = g^{ij} a_j$, d.h. Indizes können sowohl herauf- als auch heruntergezogen werden.

Spezialfälle:

* $g_{ij} \to \delta_{ij}$ $\Rightarrow$ euklidischer Raum

* $g_{ij} \to \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}_{ij}$ $\Rightarrow$ „Minkowski-Metrik" (Hermann Minkowski 1864-1909)

  $\Rightarrow$ spezielle Relativitätstheorie (Kapitel 6).