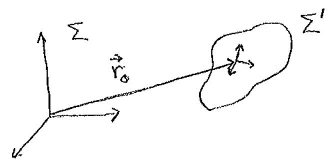
3.2 Trägheitstensor [TF 20]



Aus Seite 30:

$$\vec r = \vec r_0 + \vec r\,'$$

$$\dot{\vec r} = \dot{\vec r}_0 + \vec\omega \times \vec r\,' \quad ; \quad \vec v_0 := \dot{\vec r}_0 .$$

Wir bestimmen die kinetische Energie des rotierenden Körpers:

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2}\, \dot{\vec r}_a = \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\vec v_0 + \vec\omega \times \vec r_a\,'\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_a m_a\right) \vec v_0^{\,2} + \sum_a \vec v_0 \cdot \vec\omega \times \sum_a m_a \vec r_a\,' + \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\vec\omega \times \vec r_a\,'\right)^2 .$$

Gesamtmasse M

Falls der Koordinatenursprung vom Σ' beim Schwerpunkt liegt, verschwindet $\sum_a m_a \vec r_a\,'$ und damit der ganze Term.

Falls keine Translationsbewegung stattfindet, verschwindet dieser Term.

Folglich können wir den letzten Term umschreiben:

$$(\vec\omega \times \vec r_a\,')^2 = \sum_i (\vec\omega \times \vec r_a\,')_i\, (\vec\omega \times \vec r_a\,')_i$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{imn}\, \omega_j\, x'_{ak}\, \omega_m\, x'_{an}$$

$$= \omega_j \left[\delta_{jm} \underbrace{(x'_{ak} x'_{ak})}_{|\vec r_a\,'|^2} - x'_{aj}\, x'_{am} \right] \omega_m .$$

Seite 30

$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

Kronecker - Symbol

(Leopold Kronecker 1823 - 1891)

Daher hat die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} M \vec v_0^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{3} \omega_i\, \Theta_{ij}\, \omega_j \;,$$

wobei

$$\Theta_{ij} = \sum_a m_a \left(\delta_{ij}\, |\vec r_a\,'|^2 - x'_{ai}\, x'_{aj} \right)$$

$$= \int d^3\vec r\,'\; \varrho(\vec r\,') \left(\delta_{ij}\, |\vec r\,'|^2 - x'_i\, x'_j \right)$$

Kontinuumlimes

der Trägheitstensor ist.

Wichtige Eigenschaften des Trägheitstensors:

* Θ_{ij} ist bzgl. eines körperfesten Koordinatensystems definiert, und hängt von der Wahl des Ursprungs ab (vgl. Seite 33).

* Θ_{ij} sind die Komponenten eines Tensors 2. Stufe (vgl. Kap. 3.3). Mit Θ bezeichnen wir die entsprechende Matrix. Es gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \omega_i \Theta_{ij} \omega_j = \omega^T \Theta \omega .$$

* Es folgt aus der Definition, dass Θ symmetrisch ist: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$.

* Transformation unter Drehung:

Drehmatrix, vgl. Seite 13

$$\Theta'_{ij} = R_{ik} R_{jl} \Theta_{kl}$$
$$= R_{ik} \Theta_{kl} (R^T)_{lj}$$
$$\Leftrightarrow \Theta' = R \Theta R^T .$$

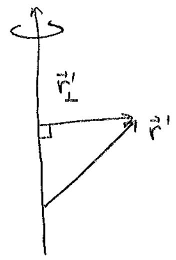
* Eigenwerte und Eigenvektoren: Jede symmetrische Matrix lässt sich durch eine orthogonale Transformation diagonalisieren $\Rightarrow$ man kann das Koordinatensystem so drehen, dass

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

gilt. Die Θ_i heissen <u>Hauptträgheitsmomente</u>, und die entsprechenden Eigenvektoren definieren die <u>Hauptträgheitsachsen</u>.

* Kinetische Energie im Hauptachsensystem: $T = \frac{1}{2} \{ \Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2 \}$.

* Trägheitsmoment bzgl. einer festen Achse:



Sei $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$.

Dann ist $T = \frac{1}{2} \Theta_{33} \omega^2$, mit

$$\Theta_{33} = \int d^3\vec{r}' \, \rho(\vec{r}') \left(|\vec{r}'|^2 - (x'_3)^2 \right)$$
$$= \int d^3\vec{r}' \, \rho(\vec{r}') \, \underbrace{|\vec{r}'_\perp|^2}_{(x'_1)^2 + (x'_2)^2} .$$

Beispiel:

$$M = \int_0^d dz \int_0^R d\varrho\, \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi\; \mu = \mu \cdot d \cdot \pi R^2 ,$$

$$\Theta_{33} = \int_0^d dz \int_0^R d\varrho\, \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi\; \mu \varrho^2 = \frac{\mu d \pi R^4}{2}$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 .$$

* Trägheitstensor im System $\tilde{\Sigma}'$, welches um den Vektor $\vec{a}$ bzgl. Σ' verschoben worden ist („Steinerscher Satz"):

(Jakob Steiner 1796-1863)

$$\tilde{\vec{r}}_a' = \vec{r}_a' + \vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\Theta}_{ij} = \sum_a m_a \left[\delta_{ij} |\tilde{\vec{r}}_a'|^2 - \tilde{x}_{ai}' \tilde{x}_{aj}' \right]$$

$$= \sum_a m_a \left[\delta_{ij} (\vec{r}_a' + \vec{a})^2 - (x_{ai}' + a_i)(x_{aj}' + a_j) \right]$$

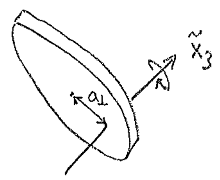
$$= \Theta_{ij} + 2 \delta_{ij} \vec{a} \cdot \underbrace{\sum_a m_a \vec{r}_a'}_{0} - a_i \underbrace{\sum_a m_a x_{aj}'}_{0} - a_j \underbrace{\sum_a m_a x_{ai}'}_{0}$$

weil Schwerpunkt am Ursprung!

$$+ \underbrace{\sum_a m_a}_{M} \left[\delta_{ij} |\vec{a}|^2 - a_i a_j \right]$$

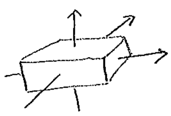
$$\Leftrightarrow \quad \tilde{\Theta}_{ij} = \Theta_{ij} + M \left(\delta_{ij} |\vec{a}|^2 - a_i a_j \right) .$$

Beispiel:



$$\Rightarrow \quad \tilde{\Theta}_{33} = \Theta_{33} + M a_\perp^2 .$$

* Für nichtdiagonale Komponenten gilt:



$$\Theta_{12} = \int d^3 \vec{r}' \, \varrho(x_1', x_2', x_3') (-x_1' x_2')$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r}' \left[-\varrho(x_1', x_2', x_3') x_1' x_2' - \varrho(\overset{-x_1'}{\cancel{x_1'}}, x_2', x_3') \overset{-x_1'}{\cancel{x_1'}} x_2' \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r}' \; x_1' x_2' \left[\varrho(-x_1', x_2', x_3') - \varrho(x_1', x_2', x_3') \right] .$$

Falls ϱ symmetrisch ist, verschwinden die nichtdiagonalen Komponenten. Die Hauptträgheitsachsen sind die (anschaulichen) Symmetrieachsen des Körpers.

Bewegungsgleichungen [TF22]

Um die Bewegungsgleichungen hinzuschreiben berechnen wir den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers im Schwerpunktsystem:

$$\vec{L} = \int d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}\times\dot{\vec{r}} \qquad \Big| \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,', \; \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

$$= \int d^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') \left\{ \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \underbrace{\vec{r}_0 \times (\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + \vec{r}\,'\times\vec{v}_0}_{\text{Diese fallen wegen } \int d^3\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' = \vec{0} \text{ weg.}} + \vec{r}\,'\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') \right\}$$

Hier ist

$$\vec{r}\,'\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, x_j'\, (\vec{\omega}\times\vec{r}\,')_k$$

$$= \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, x_j'\, \varepsilon_{klm}\, \omega_l x_m'$$

$$= \vec{e}_i\, x_j'\, \omega_l\, x_m' \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \right)$$

$$= \vec{e}_i \left[\delta_{il}\, x_j' x_j' - x_i' x_l' \right] \omega_l .$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = M\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \sum_{ij} \vec{e}_i\, \Theta_{ij}\, \omega_j .$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung lautet $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, wobei $\vec{M}$ das Drehmoment bezeichnet. Im rotierenden System gilt (vgl. Seite 16)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}\,'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L}\,' .$$

Wenn wir auch noch ein ruhendes System ($\vec{v}_0 = \vec{0}$) im Hauptachsensystem ($L_i' = \Theta_i \omega_i$, keine Summe über i) betrachten, ergibt sich

$$\vec{\omega}\times\vec{L}\,' = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Theta_1\omega_1 & \Theta_2\omega_2 & \Theta_3\omega_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1\, \omega_2\omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2) + \vec{e}_2\, \omega_3\omega_1 (\Theta_1 - \Theta_3) + \vec{e}_3\, \omega_1\omega_2 (\Theta_2 - \Theta_1)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1\omega_3 = M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases} .$$

Diese „Eulerschen Gleichungen" besitzen sehr interessante und komplizierte Lösungen (vgl. Kreisel), werden aber in dieser Vorlesung nicht genauer behandelt.