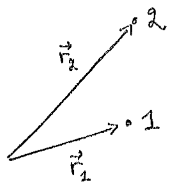
3. Starrer Körper

3.1 Kinematik [TF19]

Ein besonderes Beispiel für ein Vielkörpersystem (vgl. Kap. 1.4) ist ein starrer Körper. Hier sind die inneren Kräfte so stark, dass die Körper sich gegenüber einander nicht bewegen können. Man spricht auch von einem System mit „Zwangsbedingungen".

Wieviele „Freiheitsgrade", d.h. unabhängige Koordinaten, gibt es?

2 Massenpunkte:

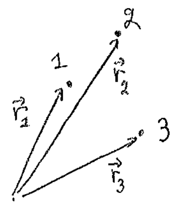


1 Zwangsbedingung: $|\vec r_1 - \vec r_2| = l_{12}$

$s = 2\times 3 - 1$ Freiheitsgrade

Zum Beispiel: 3 Schwerpunktkoordinaten + 2 Winkel für die Orientierung von $\vec r_1 - \vec r_2$ (z.B. Polarkoordinaten).

3 Massenpunkte:



3 Zwangsbedingungen: $|\vec r_1 - \vec r_2| = l_{12}$
$|\vec r_2 - \vec r_3| = l_{23}$
$|\vec r_3 - \vec r_1| = l_{31}$

$s = 3\times 3 - 3 = 6$

Zum Beispiel: 3 Schwerpunktkoordinaten + 3 Winkel („Euler-Winkel")

(Leonhard Euler 1707-1783)

N ≥ 4 Massenpunkte: Brauche 3 neue Abstände um die Lage eindeutig zu fixieren (z.B. l_{N1}, l_{N2}, l_{N3}), also ist $\Delta s = 0$ in $N \to N+1$, und $s = 6$ bleibt gültig.

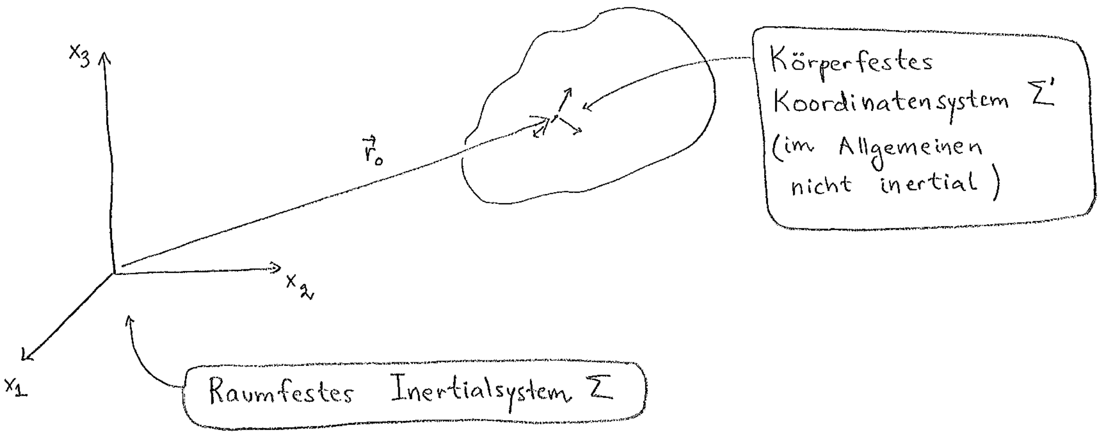
Häufig wird ein „Kontinuumlimes" genommen: die einzelnen Massenpunkte werden durch eine „Massendichte" $\rho(\vec r)$ ersetzt. Formell könnte man z.B. $\rho(\vec r) := \sum_{a=1}^{N} m_a \delta^{(3)}(\vec r - \vec r_a)$ definieren, wobei $\delta^{(3)}$ die Diracsche Deltafunktion bezeichnet. Dann ist die Gesamtmasse

(Paul Dirac 1902-1984)

$M := \sum_{a=1}^{N} m_a = \int d^3\vec r\, \rho(\vec r)$, und im Allgemeinen können diskrete Summen durch kontinuerliche Integrale dargestellt werden:

$$\sum_{a=1}^{N} m_a f(\vec r_a) = \int d^3\vec r\, \rho(\vec r) f(\vec r).$$

Ein Koordinatensystem wird wie folgt gewählt:



Wir schreiben nun: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$

$\vec{r}_0$: „Translationsbewegung"

$\vec{r}\,'$: Koordinaten bzgl. Σ'

Folglich, wie auf Seite 16: $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\dot{\vec{r}}\,'}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ weil starrer Körper

$$= \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' .$$

— o —

Zur Erinnerung (MMP): $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \sum_{i=1}^{3} c_i \vec{e}_i$.

Wie bestimmt man $\vec{c}$?

Explizit: $\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Viel besser für mathematische Manipulationen:

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k := \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

ε_{ijk}: „Levi-Civita-Symbol" (Tullio Levi-Civita 1873–1941)

$:=$ „Summenkonvention" für zweifache Indizes

— o —