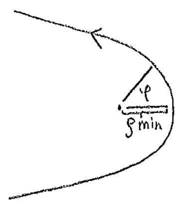
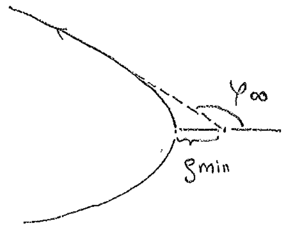
2.3 Streuung [TF 18]

Wir betrachten genauer die ungebundene Bewegung aus Seite 24:

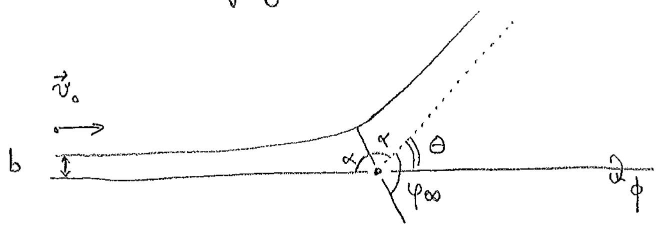
Kraft anziehend: $(\dot{\varphi} > 0)$



Kraft abstossend: $(\dot{\varphi} < 0)$



Wie sieht diese Bewegung aus dem Sichtwinkel des „Kometen" aus?



Man spricht von Streuung (z.B. des Positrons an einem Proton).
Die wichtigsten Parameter sind:

b = Stossparameter
θ = Streuwinkel

Beziehung von θ und φ_∞:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \alpha + \theta = \pi \\ \alpha + \varphi_\infty = \pi \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2(\pi - \varphi_\infty) = \underline{\underline{2\varphi_\infty - \pi}}.$$

Mit der Annahme $\lim_{\rho\to\infty} U(\rho) = 0$ sind die Erhaltungsgrössen der Formen

$$E = T + U \overset{\rho\to\infty}{=} \frac{\mu v_0^2}{2} \quad ; \quad v_0 = |\vec{v}_0|$$

$$|\ell| = |\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \mu b v_0 .$$

Die allgemeine Lösung aus Seite 21 lautet dann

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^2} \frac{\ell}{\sqrt{2\mu[E - U(\rho')] - (\ell/\rho')^2}}$$

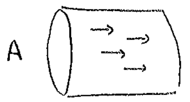
$\dot{\varphi} < 0$
$\ell = -|\ell|$
$\rho_0 := \rho_{min}$
$\varphi_0 = \pi$
$\rho \to \infty$
$\varphi \to \varphi_\infty$

$$\Rightarrow \quad \pi - \varphi_\infty = \int_{\rho_{min}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \frac{\mu b v_0}{\sqrt{2\mu\left[\frac{\mu v_0^2}{2} - U(\rho)\right] - \frac{\mu^2 v_0^2 b^2}{\rho^2}}}$$

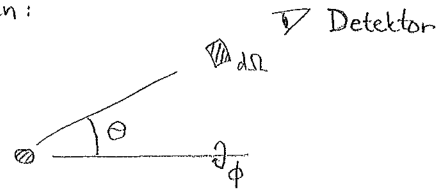
$$= \int_{\rho_{min}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{2U(\rho)}{\mu v_0^2} - \frac{b^2}{\rho^2}}} \quad ; \quad \frac{2U(\rho_{min})}{\mu v_0^2} + \frac{b^2}{\rho_{min}^2} = 1 .$$

Wirkungsquerschnitt bzw. Streuquerschnitt

In der Kern- und Teilchenphysik hat man in der Regel einen Strahl im Anfangszustand, d.h. mehrere Teilchen:



Teilchenstrahl



Streuzentrum bzw. „Target"

Wir nehmen an, dass alle Teilchen im Strahl

(i) den gleichen Impuls $\vec{p}$ haben;
(ii) gleichförmig über Querschnitt A verteilt sind.

Sei: N_P = Zahl der Projektile = Teilchen im Strahl

N_S = Zahl der Streuereignisse.

Definition des Wirkungsquerschnittes, σ:

$$N_S = \frac{\sigma}{A} N_P$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma := \frac{N_S}{N_P / A} = \frac{\overbrace{\left(\frac{N_S}{\text{Zeit}}\right)}^{\boxed{\text{Ereignisrate}}}}{\underbrace{\left(\frac{N_P}{A \times \text{Zeit}}\right)}_{\boxed{\text{Teilchenstromdichte bzw. „Luminosität"}}}}$$

„Die Ereignisrate ist Wirkungsquerschnitt mal Luminosität."

Zählt man nur Streuereignisse mit $\Theta_1 < \Theta < \Theta_2$ kann man den entsprechenden Wirkungsquerschnitt als

$$\sigma = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta \, \frac{d\sigma}{d\Theta}$$

schreiben. Hier ist $\frac{d\sigma}{d\Theta}$ der differenzielle Wirkungsquerschnitt.

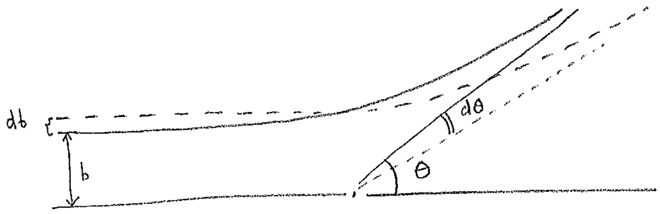
Falls es Abhängigkeit vom Azimutalwinkel ϕ gibt, kann man auch $d\sigma / d\Omega$ definieren, mit $d\Omega := d\phi \, d\Theta \sin\Theta$.

Zusammenhang von Bahnkurve und $d\sigma/d\Theta$

Seite 25: $\Theta = 2\varphi_\infty - \pi = \pi - 2(\pi - \varphi_\infty)$

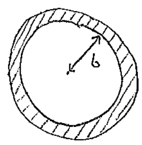
$$= \pi - 2\int_{\rho_{min}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{2U(\rho)}{\mu v_0^2} - \frac{b^2}{\rho^2}}} \quad ; \quad \frac{2U(\rho_{min})}{\mu v_0^2} + \frac{b^2}{\rho_{min}^2} = 1.$$

Das heisst, für gegebene v_0 und $U(\rho)$ ist Θ eine Funktion von b:



Alle Teilchen mit Stossparametern zwischen b und $b+db$ werden in den Winkelbereich zwischen Θ und $\Theta - d\Theta$ gestreut.

Flächenelement: $d\sigma = 2\pi b\, db = 2\pi b \left|\frac{db}{d\Theta}\right| d\Theta$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi b \left|\frac{db}{d\Theta}\right|}.$$

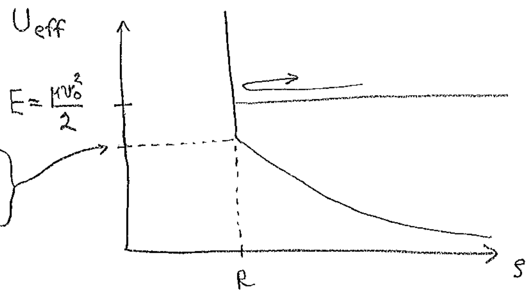
__Beispiel:__ Streuung harter Kugeln: $U(\rho) = \begin{cases} \infty, & \rho < R \\ 0, & \rho \geq R \end{cases}$.

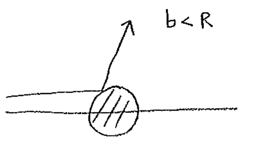
(Für zwei Billiardkugeln mit Masse m und Radius a: $\mu = \frac{m}{2}$, $R = 2a$.)

Effektives Potential: $U_{eff}(\rho) = U(\rho) + \frac{l^2}{2\mu\rho^2} = U(\rho) + \frac{\mu v_0^2}{2} \cdot \frac{b^2}{\rho^2}$

$|l| = \mu v_0 b$

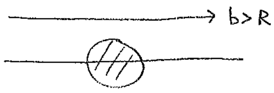
$\boxed{U_{eff} = \frac{\mu v_0^2}{2} \cdot \frac{b^2}{R^2}}$





Bestimme ρ_{min}: für $b < R$ liegt Umkehrpunkt bei $\rho_{min} = R$.

(Sonst ist $\rho_{min} = b$.)



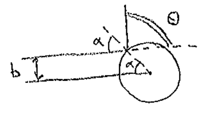
Damit ergibt sich:

$$u = \frac{b}{\varrho}, \quad du = -\frac{d\varrho\, b}{\varrho^2}$$

$$\Theta = \pi - 2\int_R^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^2}\,\frac{b}{\sqrt{1-\frac{b^2}{\varrho^2}}} = \pi + 2\int_{\frac{b}{R}}^{0} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \pi - 2\left[\operatorname{acos} u\right]_{\frac{b}{R}}^{0} = \pi - 2\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{acos}\frac{b}{R}$$

* Es gibt auch eine geometrische Begründung:



$b = R\sin\alpha$

$\alpha = \frac{\pi-\Theta}{2} \Rightarrow b = R\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)$

$$\Rightarrow b(\Theta) = R\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)^{*}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi b\left|\frac{db}{d\Theta}\right| = 2\pi R\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{R}{2}\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\pi R^2}{2}\sin\Theta$$

$$\Rightarrow \sigma = \int_0^\pi d\Theta\,\frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{\pi R^2}{2}\left[-\cos\Theta\right]_0^\pi = \pi R^2 \quad \text{Ok!}$$

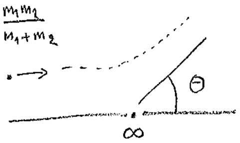
Physikalisch noch interessanter: „Rutherford-Streuung" ⇒ Aufgabe 6.2.
(Ernest Rutherford 1871-1937)

Laborkoordinaten

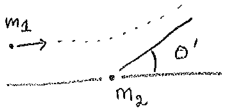
In manchen Fällen, z.B. bei Streuung von Billiardkugeln, sind „Laborkoordinaten" physikalisch sinnvoller als Schwerpunktkoordinaten.

Schwerpunkt:

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$



Labor:



$$\vec{v}\Big|_{\text{Anfang}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\Big|_{\text{Ende}} \Leftrightarrow v_0\begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}$$

Schwerpunkt ruht: $\vec{R} = \vec{0}$ ⇒ $\begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \\ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v} \end{cases}$ (Seite 11)

Boost ⟹ (Seite 13)

$$\vec{v}_2'\Big|_{\text{Anfang}} = \vec{v}_2\Big|_{\text{Anfang}} - \vec{u} := \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{v}_2\Big|_{\text{Anfang}} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\Big|_{\text{Anfang}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1'\Big|_{\text{Ende}} = \vec{v}_1\Big|_{\text{Ende}} - \vec{u} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\Big|_{\text{Ende}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\Big|_{\text{Anfang}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0}{m_1+m_2}\begin{pmatrix} m_2\cos\Theta + m_1 \\ m_2\sin\Theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tan\Theta' = \frac{m_2\sin\Theta}{m_2\cos\Theta + m_1} = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + \frac{m_1}{m_2}}.$$
