2.2 Kepler-Problem [TF17]

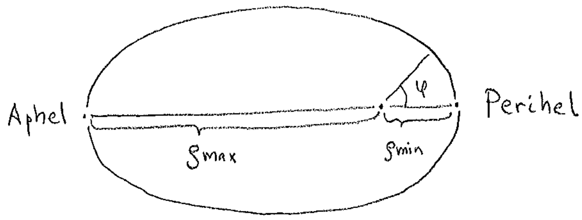
Aus Seite 22: $\varrho = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$; $p \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}^+$.

Anhand dieser Lösung (basierend auf den Newtonschen Gesetzen und der Newtonschen Gravitationstheorie) können die Keplerschen Gesetze hergeleitet werden. Sie gelten für $E<0$ bzw. $0<e<1$.

Auch eine kleine „Störung" der Form von $U(\varrho)$ führt zur Verletzung von Kepler I (vgl. Seite 21). So hat die Perihel-drehung des Merkur bekannterweise die Einsteinsche Allgemeine Relativitätstheorie bestätigt.

Kepler I

„Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne in einem Brennpunkt ($\varrho=0$)."



Apheldistanz: $\varrho_{max} = \dfrac{p}{1-e}$ Periheldistanz: $\varrho_{min} = \dfrac{p}{1+e}$

Begründung: Aufgabe 5.2(a).

Kepler II

$\Rightarrow$ Seite 12.

Kepler III

„Die Quadrate der Perioden verschiedener Planeten sind proportional zur dritten Potenz der grossen Halbachsen ihrer Bahnen um die Sonne."

Begründung: Seite 12 $\Rightarrow \dfrac{dF}{dt} = \dfrac{l}{2\mu} \Rightarrow \tau = \dfrac{2\mu F}{l}$.

Fläche

Periode $\tau = \int dt$

Die Fläche lässt sich wiederum durch die grosse Halbachse a ausdrücken, vgl. Aufgabe 5.2(b)

$$\Rightarrow \tau^2 = a^3 \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}.$$

$\alpha = G m_1 m_2$

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

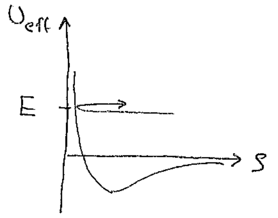
Ungebundene Bewegung

Das Ergebnis aus Seite 22, $\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$, gilt nicht nur für Planetenbahnen, sondern auch für ungebundene Bewegung.

Zur Erinnerung:

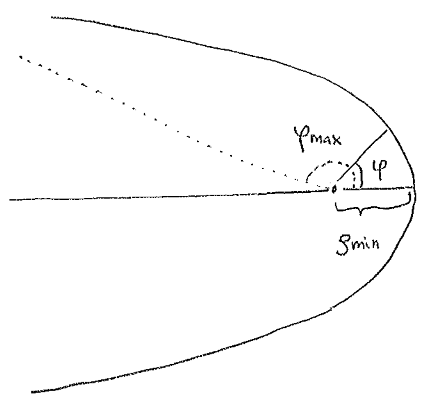
$$p := \frac{l^2}{\mu\alpha} \quad , \quad e := \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu\alpha^2}} .$$

Ungebundene Bewegung kommt vor, falls:

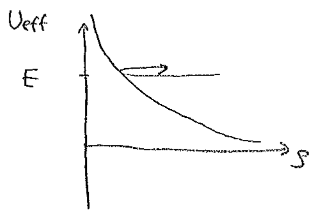


(i) die Kraft anziehend ($\alpha > 0$) und die Energie nicht-negativ ($E \geq 0$, $e \geq 1$) ist:

$$\rho = \frac{p}{1 + \underbrace{e}_{\geq 1} \cos\varphi} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \cos\varphi \to -\frac{1}{e} =: \cos\varphi_{max} .$$



$$\rho_{min} = \frac{p}{1+e}$$



(ii) die Kraft abstossend ($\alpha < 0$) ist. Lösung ist wie oben, aber $p = \frac{l^2}{\mu\alpha}$ wird negativ, $p = -|p|$, und $E > 0$, $e > 1$.

$$\rho = \frac{-|p|}{1 + e\cos\varphi} \quad ; \quad \rho_{min} = \frac{-|p|}{1-e} > 0 .$$

$$\rho \to \infty \quad \text{für} \quad \cos\varphi \to -\frac{1}{e} =: \cos\varphi_\infty .$$