2. Zentralpotential

2.1 Zweikörperproblem [TF 16]

(Joseph-Louis Lagrange 1736-1813)

(TF benutzt von nun an den „Lagrange-Formalismus". Bei uns wird dieser erst in Mechanik II eingeführt. Die Bewegungsgleichungen sind aber identisch.)

Betrachtet werden zwei Körper (Massen m_1, m_2), die nur eine konservative innere Kraft fühlen. Die Kraft sei eine Zentralkraft.

<u>Zur Erinnerung</u> [Kap. 1.4, insbesondere Seiten 11, 12]:

* Schwerpunkt- und Relativkoordinaten:

$$\begin{cases} \vec{R} := \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

* Reduzierte Masse:

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \, .$$

* Bewegungsgleichung:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(\vec{r}) \, .$$

* Nur innere Kräfte $\Rightarrow$ Gesamtimpulserhaltung:

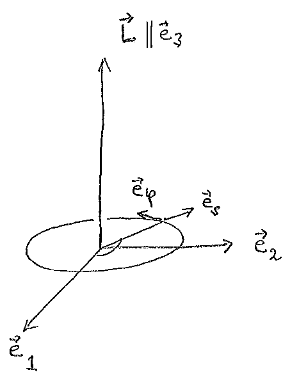
$$\ddot{\vec{R}} = \vec{0} \, .$$

* Zentralkraft $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung:

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const} \, .$$

Wähle Richtung von $\vec{L}$ als z-Achse und benutze Polarkoordinaten, d.h. $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$ (vgl. Seite 2):

$$l := \pm |\vec{L}| = \mu \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \, .$$



* Konservative Kraft, $\vec{F}_{21}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \Rightarrow$ Energieerhaltung:

$$E = T + U = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U = \text{const} \, .$$

Wahl des Potentials

Eines der wichtigsten Beispiele für ein Zentralkraftproblem ist das Keplerproblem, d.h.

$$\vec{F}_{21}(\vec{r}) = -\nabla U(r) \quad , \quad r := |\vec{r}|$$

$$U(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} \quad , \quad G = \text{Newtonsche Gravitationskonstante.}$$

Im Folgenden schreiben wir

$$U(r) := -\frac{\alpha}{r} \quad ,$$

mit $\alpha = G m_1 m_2 > 0$ für Schwerkraft. Für Coulomb-Kraft wäre $\alpha < 0$ (abstossende Kraft) auch möglich.

Bewegungsgleichung

Seite 12: Die Bewegung findet in einer Ebene statt: $z = 0$.

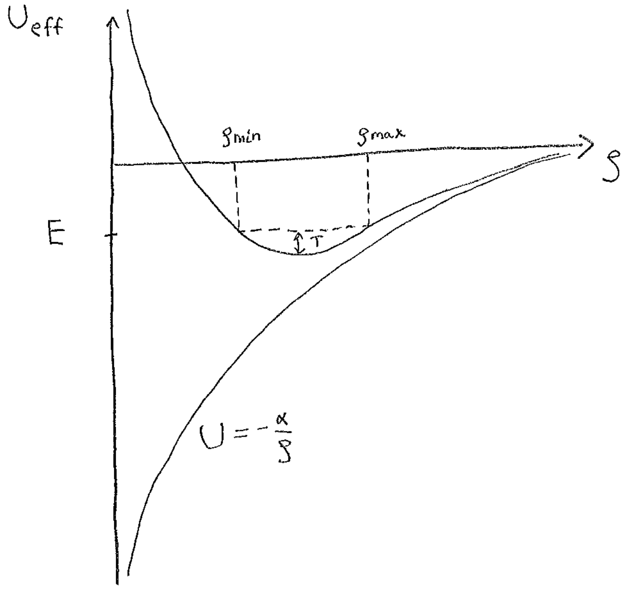
Seite 2: $\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho \;;\; \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \;\Rightarrow\; \dot{\vec{r}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$.

Energieerhaltung: $E = T + U = \frac{\mu}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + U(\rho)$

$$= \frac{\mu\dot{\rho}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) = \text{const.}$$

$$\boxed{\ell = \mu\rho^2\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; \rho^2\dot{\varphi}^2 = \frac{\ell^2}{\mu^2\rho^2}}$$

Die Kombination $U_{eff}(\rho) := \frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)$ wird ein „effektives Potential" genannt.



Weil $\frac{\mu\dot{\rho}^2}{2} \geq 0$ gilt, hat E einen minimalen möglichen Wert:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}\right) = -\frac{\ell^2}{\mu\rho^3} + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0$$

$$\frac{\ell^2}{\mu\rho} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$$

$$\Rightarrow\; E_{min} = \frac{\ell^2\,\mu^2\alpha^2}{2\mu\cdot\ell^4} - \frac{\mu\alpha^2}{\ell^2} = -\frac{\mu\alpha^2}{2\ell^2}\,.$$

Lösung der Bewegungsgleichung

Aus Energieerhaltung folgt $\frac{\mu\dot{\rho}^2}{2} = E - U_{eff}(\rho)$.

Diese Grösse muss positiv sein $\Rightarrow$ nur bestimmte Werte von ρ sind erlaubt. Werte von ρ mit $\dot{\rho}=0$ heissen Umkehrpunkte.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

* man findet zwei Umkehrpunkte, ρ_{min} und ρ_{max} (vgl. Seite 20)
  $\Rightarrow$ „gebundene" Bewegung.
* $\rho_{max} = \infty$ $\Rightarrow$ „ungebundene" Bewegung.

Im erlaubten Bereich $\rho_{min} \leq \rho \leq \rho_{max}$ erhalten wir

$$\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - U_{eff}(\rho)\right]}.$$

Es lohnt sich, die Zeitabhängigkeit zu eliminieren und zuerst die Form der Bahnkurve zu betrachten:

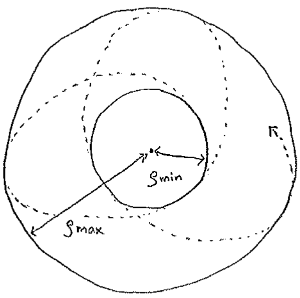
$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\ell=\mu\rho^2\dot{\varphi}} = \frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\frac{\ell}{\mu\rho^2}.$$

Falls wir ablaufende Bewegung ($\dot{\rho}\geq 0$) betrachten, erhalten wir

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\mu\rho^2}{\ell}\cdot\dot{\rho} = \frac{\rho^2}{\ell}\sqrt{2\mu\left[E - U_{eff}(\rho)\right]}$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi = \frac{d\rho\,\ell}{\rho^2\sqrt{2\mu\left[E-U_{eff}(\rho)\right]}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho'}{\rho'^2}\cdot\frac{\ell}{\sqrt{2\mu\left[E-U_{eff}(\rho')\right]}}\;; \qquad \rho_0 \geq \rho_{min},\quad \rho \leq \rho_{max}.$$



Durchführung der Integrale für $U(\varrho) = -\frac{\alpha}{\varrho}$.

$$U_{\text{eff}}(\varrho) = U(\varrho) + \frac{\ell^2}{2\mu\varrho^2} = -\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\ell^2}{2\mu\varrho^2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho'}{\varrho'^2} \frac{\ell}{\sqrt{2\mu\left[E + \frac{\alpha}{\varrho'}\right] - \frac{\ell^2}{\varrho'^2}}} \quad ; \quad u := \frac{1}{\varrho'} \qquad du = -\frac{d\varrho'}{\varrho'^2}$$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \, \frac{\ell}{\sqrt{2\mu(E + \alpha u) - \ell^2 u^2}}$$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu E}{\ell^2} + \frac{2\mu\alpha}{\ell^2} u - u^2}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x - b/2}{\sqrt{a + b^2/4}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - b/2}{\sqrt{a + b^2/4}}\right)^2}}$$

$$= -\operatorname{acos}\left(\frac{x - b/2}{\sqrt{a + b^2/4}}\right)$$

$$= -\operatorname{acos}\left(\frac{2x - b}{\sqrt{b^2 + 4a}}\right)$$

$$= \left[\operatorname{acos}\left(\frac{\frac{2}{\varrho} - \frac{2\mu\alpha}{\ell^2}}{\sqrt{\left(\frac{2\mu\alpha}{\ell^2}\right)^2 + 4\cdot\frac{2\mu E}{\ell^2}}}\right)\right]_{\varrho_0}^{\varrho} .$$

Wähle $\varphi = \varphi_0$ bei $\varrho = \varrho_0$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\frac{1}{\varrho} - \frac{\mu\alpha}{\ell^2}}{\frac{\mu\alpha}{\ell^2}\sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu\alpha^2}}}$$

Hier wurde $\mu\alpha > 0$ angenommen, dies ist aber keine Beschränkung, weil wir ursprünglich $\dot{\varrho} = \pm\sqrt{\dots}$ hatten.

Endergebnis:

Anhand von $e := \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu\alpha^2}}$, genannt „Exzentrizität",

sowie $p := \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$ erhalten wir

$$e\cos\varphi = \frac{p}{\varrho} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}} .$$

Geschlossene Bahn, $\varrho(2\pi) = \varrho(0)$!

— • — • —