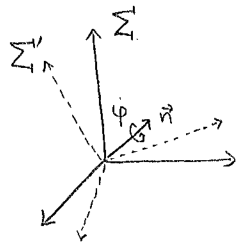
1.6 Beschleunigte Bezugssysteme [TF 6]

Wir betrachten eine Koordinatentransformation, die keine Galilei-Transformation ist. Insbesondere: eine zeitunabhängige Drehung ist eine Galilei-Transformation, eine Drehung mit nichtverschwindender Winkelgeschwindigkeit ist es aber nicht.



Σ = Inertialsystem, Koordinaten x_i

Σ' = gegenüber Σ rotierendes Koordinatensystem, Koordinaten x'_i

Ursprünge fallen zusammen.
Beispiele: Karussel, Erde.

Es gäbe eine t-abhängige Drehmatrix $R(t)$, so dass in der Tabellennotation $x' = R(t)\,x$ gilt. Aus $R^T R = \mathbb{1}$ folgt $R^{-1} = R^T$, d.h. $x = R^T(t)\,x'$. In der Vektornotation gibt es aber nur einen Vektor:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x'_i \vec{e}'_i = \vec{r}\,'.$$

Im Σ gilt $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$; das Ziel ist jetzt, die Bewegungsgleichung im rotierenden System Σ' herzuleiten.

Sei die Winkelgeschwindigkeit definiert als Vektor mit Richtung $\vec{n}$ und dem Koeffizienten $\dot{\varphi}$: $\vec{\omega} := \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{n}$.

Der Geschwindigkeitsvektor hat in Σ'-Koordinaten die Form

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_{i=1}^{3} x'_i \vec{e}'_i \right\} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \dot{x}'_i \vec{e}'_i + x'_i \dot{\vec{e}}'_i \right\}.$$

Der Teil $\sum_i \dot{x}'_i \vec{e}'_i$ wird mit $\dot{\vec{r}}\,'$ bezeichnet, oder $\dot{x}'$ als Tabelle.
Wie lautet der Teil $\sum_i x'_i \dot{\vec{e}}'_i$?

Wie rotiert ein Einheitsvektor?

Sei $\vec{e}'$ ein allgemeiner Einheitsvektor, fixiert bzgl. Σ'.
Es folgt:

$$\vec{e}' \cdot \vec{e}' = 1 \quad \Big| \ \frac{d}{dt}$$

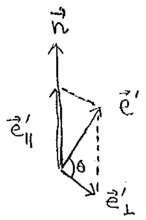
$$\Rightarrow \quad \vec{e}' \cdot \dot{\vec{e}}' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}' \perp \vec{e}' \quad .$$

Es ist auch klar, dass $\dot{\vec{e}}' \perp \vec{\omega}$ gilt, denn die Komponente entlang der Drehachse wird nicht gedreht.

Aus $\dot{\vec{e}}' \perp \vec{e}'$ und $\dot{\vec{e}}' \perp \vec{\omega}$ folgt $\dot{\vec{e}}' = \alpha\, \vec{\omega} \times \vec{e}'$,
wobei α eine bis jetzt unbekannte Konstante ist.

Um α zu bestimmen können wir Polarkoordinaten benutzen.
Seite 2: $\frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$.
Wähle jetzt $\vec{n}$ als Richtung der z'-Achse:



$$\Rightarrow \quad \vec{e}'_\perp = \cos\theta \ \vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}' = \dot{\vec{e}}'_\perp = \underbrace{\cos\theta}_{\text{„}\rho\text{" = const.}} \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi \qquad (1)$$

Auf der anderen Seite:

$$\vec{\omega} \times \vec{e}' = \vec{\omega} \times (\vec{e}'_\parallel + \vec{e}'_\perp) = \vec{\omega} \times \vec{e}'_\perp = \omega\ \vec{n} \times \vec{e}'_\perp \qquad (\omega = |\vec{\omega}|)$$

$$= \omega \cos\theta\ \vec{n} \times \vec{e}_\rho = \omega \cos\theta\ \vec{e}_\varphi . \qquad (2)$$

Durch Vergleich von (1) und (2) erhalten wir

$$\dot{\vec{e}}' = \vec{\omega} \times \vec{e}' \quad \text{mit} \quad \vec{\omega} = \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega} \vec{n} \quad , \ \text{d.h. } \alpha = 1 .$$

Folglich, aus Seite 15: $\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$

Bewegungsgleichung im Σ'

Anhand von $\dot{\vec r} = \dot{\vec r}' + \vec\omega \times \vec r'$ können wir eine zweite Ableitung nehmen:

$$\ddot{\vec r} = \frac{d}{dt}\Big(\overbrace{\sum_i \dot x_i' \vec e_i'}^{\dot{\vec r}'}\Big) + \vec\omega \times \frac{d}{dt}\Big(\overbrace{\sum_i x_i' \vec e_i'}^{\vec r'}\Big) + \dot{\vec\omega} \times \vec r'$$

$$= \ddot{\vec r}' + \vec\omega \times \dot{\vec r}' + \vec\omega \times \dot{\vec r}' + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r') + \dot{\vec\omega} \times \vec r'$$

$$= \ddot{\vec r}' + 2\vec\omega \times \dot{\vec r}' + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r') + \dot{\vec\omega} \times \vec r'.$$

Nach Einsatz in $m\ddot{\vec r} = \vec F$ folgt

$$\underbrace{m\ddot{\vec r}' = \vec F}_{\text{wie Newton II}} \underbrace{- m\left[2\vec\omega \times \dot{\vec r}' + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r') + \dot{\vec\omega} \times \vec r'\right]}_{\text{„Scheinkräfte"}}.$$

Insbesondere: $m\ddot{\vec r}' \neq \vec 0$ auch bei $\vec F = \vec 0$ $\Rightarrow$ Σ' ist <u>kein</u> Inertialsystem!

Für $\dot{\vec\omega} = \vec 0$ (konstante Winkelgeschwindigkeit):

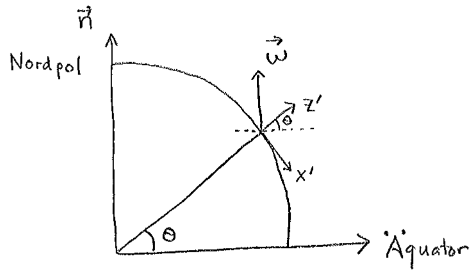
(Gaspard Gustave de Coriolis 1792–1843)

$-2m\vec\omega \times \dot{\vec r}'$ = „<u>Coriolis-Kraft</u>"

$-m\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r')$ = „<u>Zentrifugalkraft</u>"

Koordinatensystem auf der Erde:

Θ = Breitengrad



$\omega_z' = \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = \omega \sin\Theta$

$\omega_x' = -\omega \cos\Theta$

$$\Rightarrow \omega' = \begin{pmatrix} -\omega\cos\Theta \\ 0 \\ \omega\sin\Theta \end{pmatrix}$$

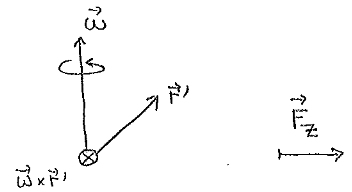
$$\Rightarrow -2m\vec\omega \times \dot{\vec r}' = 2m \begin{vmatrix} \vec e_x' & \vec e_y' & \vec e_z' \\ \dot x' & \dot y' & \dot z' \\ -\omega\cos\Theta & 0 & \omega\sin\Theta \end{vmatrix} = 2m\omega \Big\{ \dot y' \sin\Theta\, \vec e_x' - (\dot x' \sin\Theta + \dot z' \cos\Theta)\, \vec e_y' + \dot y' \cos\Theta\, \vec e_z' \Big\}.$$

Genaueres zur Physik der Scheinkräfte

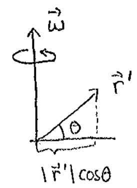
Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$

* bereits vorhanden wenn $\dot{\vec{r}}\,' = \vec{0}$.

* Richtung:



* Betrag:

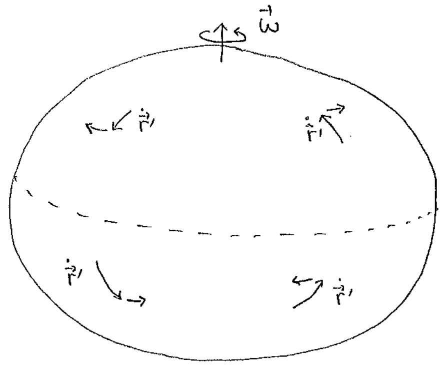


$|\vec{F}_Z| = m\omega^2 r' \cos\theta$

Coriolis-Kraft $\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,' = 2m\,\dot{\vec{r}}\,'\times\vec{\omega}$

* abhängig von Geschwindigkeit.

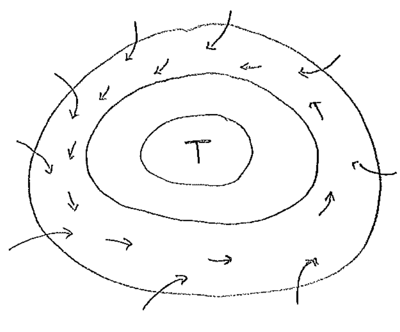
* Richtung:



* Betrag: $|\vec{F}_C| = 2m\omega\,|\dot{\vec{r}}\,'_\perp| \Rightarrow$ wichtiger als Zentrifugalkraft bei kleinem ω, weil linear statt quadratisch.

* Anwendungen in der Artillerie, Meteorologie, Flussdynamik, ...

Zyklon



(Nordhalbkugel)