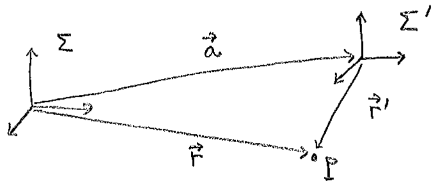
1.5 Inertialsysteme [TF5]

Wahl eines Inertialsystems (im Sinne von Newton I) ist nicht eindeutig. Transformationen der Koordinaten beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen bezeichnet man als Galilei-Transformationen.
(Galileo Galilei 1564 - 1641)

Eine allgemeine G.-T. besteht aus Translation, Boost, und Drehung.

Translation bzw. Verschiebung

(a) räumlich



Koordinaten von P bzgl. Σ': $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$.

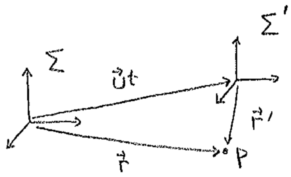
Falls es keine Kräfte gibt, und damit $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ gilt, dann ist auch $\ddot{\vec{r}}' = \vec{0}$, d.h. Σ und Σ' sind beide Inertialsysteme.

(b) zeitlich

Bzgl. Σ': $t' = t - \tau$; $\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}$; $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt'^2} = \vec{0}$.

Boost bzw. eigentliche Galilei-Transformation

Σ' bewege sich gegenüber Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$, und $\Sigma' = \Sigma$ bei $t = 0$;

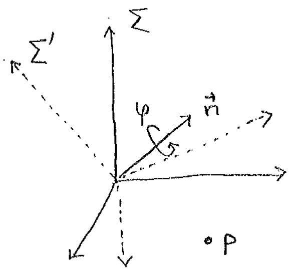


Koordinaten von P bzgl. Σ': $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$.

Falls es keine Kräfte gibt: $\ddot{\vec{r}}' = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r} - \vec{u}t) = \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$.

D.h. Σ und Σ' sind beide Inertialsysteme.

Drehung bzw. Rotation



Zusammenhang der Koordinaten:

$$|\vec{r}'| = |\vec{r}| \Leftrightarrow \sqrt{\sum_i (x_i')^2} = \sqrt{\sum_i x_i^2},$$

d.h. die Beziehung soll linear sein:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} x_j \qquad \text{für } \vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i .$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = R\,x$$

Tabelle $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

3×3 Drehmatrix $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$

→

Definition der Drehungen:

Eine Drehung ist eine lineare Transformation, welche die Längen von Vektoren $\left(|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}\right)$ und die Winkel zwischen Vektoren $\left(\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}||\vec{s}|}\right)$ invariant lässt, d.h.

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{s} \quad \text{bleibt invariant} \quad \forall\ \vec{r},\vec{s}}\ ^{\dagger}$$

Form der Drehmatrix:

Invarianz erfordert $\vec{r}\,'\cdot\vec{s}\,' = \sum_{i=1}^{3} x_i' y_i' = x'^T y' = x^T R^T R y = x^T y \quad \forall x,y$,

$\vec{r}\,' = \sum_i x_i' \vec{e}_i\,,\ \vec{s}\,' = \sum_i y_i' \vec{e}_i$ — mit Tabellen — $x' = Rx$

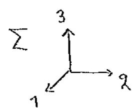
d.h. $\underline{R^T R = \mathbb{1}}$. Drehungen verlangen eine orthogonale Drehmatrix.

Als Folge: $\det(R^T R) = \det(R^T)\det(R) = (\det R)^2 = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1$.

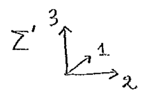
Drehungen hängen stetig mit der Identität zusammen $\Rightarrow \det R = +1$.

Der Fall $\det R = -1$ entspricht einer Spiegelung, z.B.

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rechtssystem



Linkssystem

Galilei-Invarianz:

$$\ddot{x}' = \frac{d^2}{dt^2} x' = \frac{d^2}{dt^2} Rx = R\ddot{x} = 0 \iff \ddot{x} = 0$$

multipliziere durch R^{-1} bzw. R^T

D.h. Σ und Σ' sind beide Inertialsysteme.

Bemerkungen:

* Jede Hintereinander-Ausführung von Galilei-Transformationen ist wieder eine Galilei-Transformation; mathematisch bilden diese eine „Gruppe".
* Ohne Beweis: Jede Galilei-Transformation lässt sich als Hintereinander-Ausführung von Translation, Boost, und Drehung schreiben.

---

† Es kann gezeigt werden, dass die Invarianz von Längen schon die Invarianz von Winkeln impliziert.