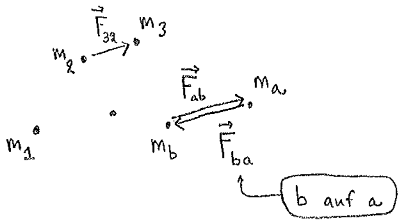
1.4 System von Massenpunkten [TF 4]

Wir verallgemeinern die Betrachtungen vom Kapitel 1.3 zu einem System von vielen Massenpunkten. Falls es auch nur innere Kräfte gibt, erhält Impulserhaltung dadurch eine stärkere Rolle.



Die Gesamtzahl der Massenpunkte sei mit N bezeichnet.

(a) Impulserhaltung

Gesamtimpuls: $\vec p := \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec r}_a$.

$$\Rightarrow \frac{d\vec p}{dt} = \sum_a m_a \ddot{\vec r}_a$$

$$\overset{\text{Newton II}}{=} \sum_{a\neq b} \vec F_{ba}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a\neq b} \left(\vec F_{ba} + \vec F_{ab} \right)$$

$$\overset{\vec F_{ab} = -\vec F_{ba}\ (\text{Newton III})}{=} \vec 0 \, .$$

D.h. Gesamtimpuls ist Erhaltungsgrösse, obwohl es Kräfte gibt!

(b) Drehimpulserhaltung

Gesamtdrehimpuls: $\vec L := \sum_{a=1}^{N} m_a \vec r_a \times \dot{\vec r}_a$.

$$\Rightarrow \frac{d\vec L}{dt} = \sum_a m_a \left(\dot{\vec r}_a \times \dot{\vec r}_a + \vec r_a \times \ddot{\vec r}_a \right)$$

$$= \sum_{a\neq b} \vec r_a \times \vec F_{ba}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{a\neq b} \left(\vec r_a \times \vec F_{ba} + \vec r_b \times \vec F_{ab} \right)$$

$$\overset{\vec F_{ab} = -\vec F_{ba}\ (\text{Newton III})}{=} \frac{1}{2} \sum_{a\neq b} (\vec r_a - \vec r_b) \times \vec F_{ba} \, .$$

D.h. Gesamtdrehimpuls ist Erhaltungsgrösse, falls $\vec F_{ba} \parallel \vec r_a - \vec r_b$, wie es z.B. bei der Coulomb-Kraft und der Schwerkraft der Fall ist.

(c) Energieerhaltung

Wir betrachten ein konservatives Kraftfeld, mit dem Potential $U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$, wobei die $\vec{r}_a$ die Ortsvektoren der Massenpunkte m_a sind.

Wir bezeichnen mit ∇_a einen Gradienten bezüglich $\vec{r}_a$, d.h.

$$\nabla_a U := \frac{\partial U}{\partial x_a} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_a} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_a} \vec{e}_z .$$

Die Kraft an Massenpunkt m_a, verursacht von den anderen Massenpunkten $b \neq a$, sei

$$\vec{F}_a(\vec{r}_a) = -\nabla_a U .$$

Die kinetische Energie lautet

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} ,$$

und die Gesamtenergie beträgt $E = T + U$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} + U \right\} \\ &= \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \ddot{\vec{r}}_a + \frac{d}{dt} U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \\ &= \sum_a \dot{\vec{r}}_a \cdot (-\nabla_a U) + \sum_a \nabla_a U \cdot \frac{d\vec{r}_a}{dt} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Newton II & Kettenregel

D.h. Gesamtenergie ist Erhaltungsgrösse.

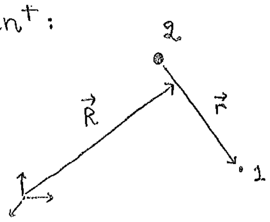
Beispiel: Zweikörpersystem

Seien die Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$; es gibt keine äusseren Kräfte.

Bewegungsgleichungen:
$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} \underbrace{=}_{\boxed{\text{Newton III}}} -\vec{F}_{21} \end{cases}$$

Wir führen Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein^{+}:

$$\begin{cases} \vec{R} := \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$



Es folgt:
$$* \quad \ddot{\vec{R}} = \frac{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}{m_1 + m_2} = \vec{0} \quad \text{(Gesamtimpulserhaltung)}$$
$$* \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{21} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{21} .$$

Eine „reduzierte Masse" wird als $\mu := \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ definiert.

Falls $\vec{F}_{21}$ nur von $\vec{r}$ abhängt, erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(\vec{r})} ,$$

d.h. Zweikörpersystem lässt sich auf Bewegung eines Körpers der Masse μ zurückführen.

Bemerkung: Falls $m_2 \gg m_1$ gilt, ist $\mu \approx m_1$, $\vec{R} \approx \vec{r}_2$, $\vec{r}_1 \approx \vec{R} + \vec{r}$,
d.h. Massenpunkt 2 ruht auf Position $\vec{R}$.

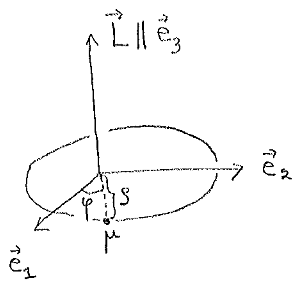
$^{+}$ Die inversen Transformationen:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \\ m_2 \vec{r} = m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \\ -m_1 \vec{r} = -m_1 \vec{r}_1 + m_1 \vec{r}_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Falls weiterhin $\vec{F}_{21}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$ gilt, haben wir eine Zentralkraft.
Laut Kapitel 1.3 (Seite 7) bleibt $\vec{L} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhalten.
Was aber bedeutet $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ in der Praxis?

Wahl der Koordinaten: $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}, \; \dot{\vec{r}} \perp \vec{L}$



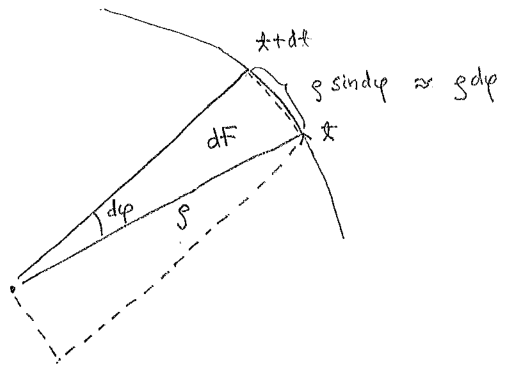
$\Rightarrow$ $\vec{r}(t)$ bleibt $\forall t$ in einer Ebene $\perp \vec{L}$, und die Bahnkurve lässt sich durch Polarkoordinaten parametrisieren (vgl. Seite 2).

(Johannes Kepler 1571–1630)

Das zweite Keplersche Gesetz

Wie auf Seite 2:

$$\vec{r} = \varrho \, \vec{e}_\varrho$$
$$\dot{\vec{r}} = \dot{\varrho} \, \vec{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \, \vec{e}_\varphi$$
$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \varrho^2 \dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_\varrho \times \vec{e}_\varphi}_{\vec{e}_3}$$
$$l := |\vec{L}| = \mu \varrho^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$



Flächenelement:

$$dF = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \varrho \, d\varphi = \frac{\varrho^2}{2} \dot{\varphi} \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{\varrho^2 \dot{\varphi}}{2} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.}$$

$\Leftrightarrow$ „Flächensatz", d.h. Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen.

(Von Kepler aus Beobachtungen gefunden.)