1.3 Erhaltungssätze [TF3]

Die Newtonschen Gesetze sind Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. In Spezialfällen können sie aber als Differenzialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden, so dass ihre Lösung einfacher wird. Dies ist der Fall besonders wenn Erhaltungssätze gefunden werden können.

(Mechanik II: Erhaltungssätze sind nah verwandt mit den Symmetrien des Systems.)

(a) Impulserhaltung

Sei $\vec{F} = \vec{0}$, d.h. keine Kräfte.

Newton II $\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{p}$ ist Erhaltungsgrösse.

(b) Drehimpulserhaltung

Sei $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$, d.h. „Zentralkraft", wie Coulomb-Kraft oder die Newtonsche Schwerkraft.

(Charles Augustin de Coulomb 1736-1806)

Definiere $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} \underset{m \text{ konstant}}{=} m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \underset{\text{Newton II}}{=} \vec{r} \times \vec{F} \underset{\vec{r} \parallel \vec{F}}{=} \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{L}$ ist Erhaltungsgrösse.

(c) Energieerhaltung

Sei $\vec{F}$ der Form $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)$, wobei U und $\vec{B}$ gegebene Funktionen sind. Wir nennen U ein „Potential".

Definiere kinetische Energie als $T := \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$, und Gesamtenergie als $E := T + U$.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} + U(\vec{r})\right\}$$

$$= m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} + \nabla U(\vec{r})\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$\underset{\text{Newton II}}{=} \dot{\vec{r}}\cdot\left\{-\cancel{\nabla U(\vec{r})} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right\} + \cancel{\nabla U(\vec{r})}\cdot\dot{\vec{r}}$$

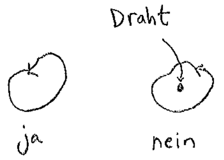
$$\underset{\text{Spatprodukt}}{=} \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$\Rightarrow E$ ist Erhaltungsgrösse.

Konservatives Kraftfeld

Ein wichtiger Spezialfall ist, dass $\vec{F}$ zeit- und geschwindigkeitsunabhängig ist.
Ein solches Kraftfeld heisst konservativ, falls es ein Potential gibt, mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$.

Seite 7: Kraftfeld konservativ $\Rightarrow$ Energie bleibt erhalten.



Definition: Ein Gebiet ist „einfach zusammenhängend", falls jede geschlossene Kurve sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt.

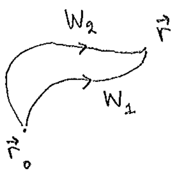
Behauptung: Für einfach zusammenhängende Gebiete gilt

$$\vec{F} \text{ konservativ } \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Beweis:

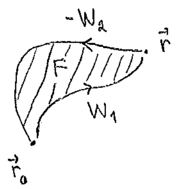
„$\Rightarrow$" $\quad \vec{F} = -\nabla U \Rightarrow -\nabla \times (\nabla U) = 0.$

(Henri Poincaré 1854–1912) „Poincaré-Lemma" (MMP)



„$\Leftarrow$" Sei $\vec{r}_0$ beliebig.
Definiere $U(\vec{r}) := -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{s})$.

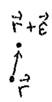
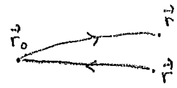
Die Definition ist unabhängig vom Weg W:



$$\int_{W_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} - \int_{W_2} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \oint_{W_1 \cup (-W_2)} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_F d\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{F} = 0.$$

(Georg Gabriel Stokes 1819–1903) Satz von Stokes (da einfach zusammenhängend)

$$\Rightarrow \int_{W_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_{W_2} d\vec{s} \cdot \vec{F}.$$

Betrachte jetzt $W_1 =$ , $W_2 =$ 

Mit W_1: $\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + O(\vec{\varepsilon}^2)$.

Mit W_2: $-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{F} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\vec{\varepsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{F} = U(\vec{r}) - U(\vec{r}+\vec{\varepsilon})$

$$= -\vec{\varepsilon} \cdot \nabla U(\vec{r}) + O(\vec{\varepsilon}^2)$$

(Brook Taylor 1685–1731) Taylor-Entwicklung

Dies gilt für beliebiges $\vec{\varepsilon} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \square$.

— ◦ —