(Isaac Newton 1642 – 1726)

1.2 Newtonsche Gesetze [TF2]

Die Newtonschen Gesetze können wie folgt (nicht wörtlich) ausgedrückt werden:

I. Es gibt Inertialsysteme, d.h. Koordinatensysteme in denen ein Massenpunkt, an den keine Kraft angreift, ruht oder gleichförmig bewegt, d.h. $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$.

II. In Inertialsystemen gilt ($\vec{p} := m\dot{\vec{r}}$)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \underset{\boxed{m \text{ konstant}}}{=} m\ddot{\vec{r}} \,.$$

III. Die Kräfte, die zwei Massenpunkte auf einander ausüben, sind entgegengesetzt gleich, d.h.

$$\underset{\boxed{1 \text{ auf } 2}}{\vec{F}_{12}} = -\vec{F}_{21} \,.$$

— o —

Bemerkungen zu den Newtonschen Gesetzen

* I ist Spezialfall von II.

* Logisch gesehen ist II ein „Gesetz" nur falls alle Grössen vorher definiert worden sind. Insbesondere sollte die Kraft auch ohne Beschleunigung, d.h. statisch, messbar sein (wie?).

  Falls Kraft und Beschleunigung definiert sind, besagt II, dass diese proportional zu einander sind. Die Proportionalitätskonstante, m, kann als die „träge Masse" des Massenpunktes definiert werden.

* In II wird vorausgesetzt, dass $\vec{F}$ höchstens von $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ abhängt.

* Entscheidend in II ist, dass dort $\ddot{\vec{r}}$ auftritt und keine höheren Ableitungen wie $\dddot{\vec{r}}$. II stellt also ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung dar.

* Wenn die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0)$ und $\dot{\vec{r}}(0)$ und die Kraftfunktion $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ gegeben sind, gibt es eine eindeutige Lösung. Die Dynamik ist also „deterministisch".

— · —

Beispiel: Massenpunkt im homogenen Schwerefeld mit Luftreibung.

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_R$$

$$\vec{F}_S = m_S \vec{g}\,, \qquad m_S = \text{„schwere Masse"}.$$

Experimentell gilt $m_S \propto m$, d.h. alle Körper fallen gleich. Wählt man $m_S = m$, dann gilt $|\vec{g}| \approx 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$ auf der Erde.

$$\vec{F}_R = -\alpha \vec{v}\,, \qquad \alpha = \text{eine Konstante}$$

„Stokessche Reibung"

(Georg Gabriel Stokes 1819–1903)

Bewegungsgleichung (Newton II):

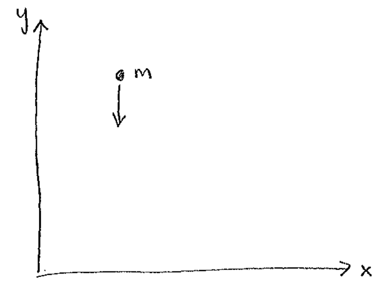
$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}\,.$$

Lösung: (i) Wähle geeignete Koordinaten!

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{y}\,\vec{e}_y = \vec{v}$$

$$\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$$



$$\Rightarrow \quad m\ddot{y} = -mg - \alpha\dot{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} = -g$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{v} + \frac{\alpha}{m} v = -g}$$

$v := \dot{y}$

Lineare inhomogene Differenzialgleichung erster Ordnung!

(ii) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ($=: v_a$):

$$\frac{dv_a}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v_a$$

$$\frac{dv_a}{v_a} = -\frac{\alpha}{m}\,dt$$

$$d \ln v_a = d\left(-\frac{\alpha}{m}t + \text{const}\right)$$

$$\ln v_a = -\frac{\alpha}{m}(t - t_0)$$

$$v_a = C_1 e^{-\frac{\alpha}{m}t}\,.$$

(iii) Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ($=: v_s$), durch Variation der Konstanten:

$$v_s = C(t)\, e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\dot{v}_s = \dot{C}\, e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{\alpha}{m} C e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{C} e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{\alpha}{m} \cancel{C e^{-\frac{\alpha}{m}t}} + \frac{\alpha}{m} \cancel{C e^{-\frac{\alpha}{m}t}} = -g$$

$$\dot{C} = -g\, e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\Rightarrow \quad C = -\frac{mg}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{m}t} + \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad v_s = -\frac{mg}{\alpha} .$$

(iv) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} v &= v_a + v_s \\ &= C_1 e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha} . \end{aligned}$$

(v) Fixiere Konstanten durch Anfangsbedingungen:

$$v(0) = C_1 - \frac{mg}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = v(0) + \frac{mg}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = v(0)\, e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{mg}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1\right) .$$

Anfangsgeschwindigkeit verschwindet wegen Reibung.

Endzustand ist unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit.

(vi) Bahnkurve:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t dt' \, \frac{dy}{dt'} \\ &= y(0) + \int_0^t dt' \, v(t') \\ &= y(0) + \int_0^t dt' \left[v(0) e^{-\frac{\alpha}{m}t'} + \frac{mg}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha}{m}t'} - 1\right)\right] \\ &= \dots \end{aligned}$$