

5.2 Dispersion und Absorption [TF 31,33,34]

Ausgangspunkt:

Aus Kapitel 5.1 wissen wir, dass die dielektrische Funktion $\epsilon(\omega) \in \mathbb{C}$ die Eigenschaften $\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon(\omega) = \epsilon$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon(\omega) = 1$ hat. Wir können aber mehr erfahren, wenn wir Kausalitätsargumente miteinbeziehen.

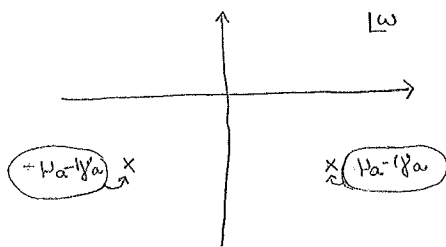
Aus Seite 48: $\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{f}_{\text{ret}}(\omega)$, mit

$$\tilde{f}_{\text{ret}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \Theta(t) f(t) e^{i\omega t}$$

$$\Theta(t) f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{f}_{\text{ret}}(\omega') e^{-i\omega' t}$$

Stellen wir uns vor, dass das letztere Integral mit dem Cauchy-Theorem durchgeführt wird (MMP III). Für $\tau < 0$ kämen Polstellen in der oberen Halbebene in Frage, weil $e^{-i(\omega_r + i\omega_i)\tau} = e^{-i\omega_r \tau} e^{\omega_i \tau} \overset{\tau < 0}{\neq} e^{-i\omega_r \tau} e^{-|\omega_i| |\tau|}$ für $\omega_i > 0$ klein ist.

Weil aber das Ergebnis für $\tau < 0$ verschwindet, wegen des Terms $\Theta(\tau)$, müssen alle Polstellen in der unteren Halbebene liegen.



Wenn wir auch die Eigenschaft $\tilde{f}_{\text{ret}}^*(\omega) = \tilde{f}_{\text{ret}}(-\omega)$ berücksichtigen, führt dies zum Ansatz

$$\tilde{f}_{\text{ret}}(\omega) \approx \sum_{a=1}^{\infty} \frac{c_a}{2} \left[\frac{1}{\mu_a - \omega - i\gamma_a} + \frac{1}{\mu_a + \omega + i\gamma_a} \right]$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{c_a}{2} \frac{2\mu_a}{\mu_a^2 - (\omega + i\gamma_a)^2}$$

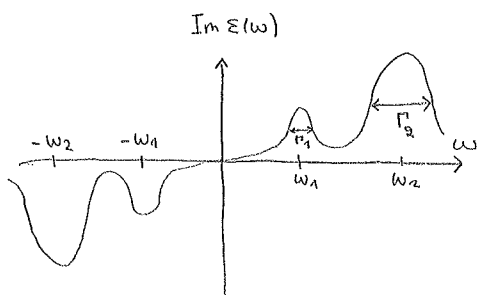
$$= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{c_a \mu_a}{\mu_a^2 + \gamma_a^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma_a}$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\Omega_a^2}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_a}$$

$\mu_a^2 + \gamma_a^2 =: \omega_a^2$
 $2\gamma_a =: \Gamma_a$
 $c_a \mu_a =: \Omega_a^2$

Dieser Ansatz heisst das Lorentz-Modell.

Wir sagen, dass die unterschiedlichen Polstellen „Resonanzen“ darstellen.



Die „Spektralfunktion“ $\text{Im} \epsilon(\omega) = \text{Im} \tilde{f}_{\text{ret}}(\omega)$, d.h.

$$\text{Im} \epsilon(\omega) \approx \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\Omega_a^2 \omega \Gamma_a}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_a^2}$$

besitzt eine besonders anschauliche Struktur.

Beispiel:

Für einen Leiter (d.h. ein Metall) gelte $\omega_1 := 0$.

Für kleine ω ist dann

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega(\omega + i\Gamma_1)} + \sum_{a \geq 2} \frac{\Omega_a^2}{\omega_a^2}$$

$$\approx 1 + \underbrace{\sum_{a \geq 2} \frac{\Omega_a^2}{\omega_a^2}}_{=: \epsilon} + \frac{i\Omega_1^2}{\omega\Gamma_1}$$

Wir sehen, dass $\epsilon(\omega)$ für $\omega \rightarrow 0$ divergiert.

Dies ist aber kein Problem, sondern wichtige Physik!

Betrachten wir nämlich Maxwell II' (Seite 46):

gehe über zur
Fourier-Darstellung,
 $\vec{D} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \vec{D} e^{-i\omega t}$ usw.

Einsatz von
 $\vec{D} = (\epsilon + \frac{i\Omega_1^2}{\omega\Gamma_1}) \vec{E}$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \dot{\vec{D}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext}$$

$$\nabla \times \vec{H} + i\omega \frac{1}{c} \vec{D} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext}$$

$$\nabla \times \vec{H} + i\omega \epsilon \frac{1}{c} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \vec{j}_{ext} + \frac{\cancel{c}}{4\pi \cancel{c}} \cdot \frac{\Omega_1^2}{\omega\Gamma_1} \vec{E} \right\}$$

Der Term neben \vec{j}_{ext} kann als induzierte

Stromdichte \vec{j}_{ind} identifiziert werden (vgl. Seite 45),

und zwar in der Form des „Ohmschen Gesetzes“:

$$\vec{j}_{ind} = \gamma \vec{E}, \quad \text{mit } \gamma = \frac{\Omega_1^2}{4\pi\Gamma_1}$$

Leitfähigkeit

(vgl. Aufgabe 6.1)

Für Nichtleiter, mit $\omega_1 \neq 0$, gibt es keinen solchen Term, sondern

$$\epsilon(\omega) \approx 1 + \sum_{a \geq 1} \frac{\Omega_a^2}{\omega_a^2}$$

ist regulär und reell.

Bemerkung:

Es gibt einen grossen qualitativen Unterschied zwischen Leitern und Nichtleitern, wenn sie mit elektromagnetischen Wellen mit $\omega \ll \omega_2$ wechselwirken. Hochenergetische Wellen mit $\omega \approx \omega_2$ sehen aber keine bedeutenden Differenzen zwischen diesen Materialien.

* Im Lorentz-Modell entspricht ω_0 dem Parameter ω_2 .

Wellen mit $\omega \approx \omega_0^*$:

Seien $\vec{j}_{ext} = \vec{j}_{ext} = 0$, und betrachten wir die effektiven Maxwell-Gleichungen aus Seite 46 in der Fourier-Darstellung (vgl. Seite 50):

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \epsilon(\omega) \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu(\omega)} + \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E} = \vec{0} \\ \nabla \times \vec{E} - \frac{i\omega}{c} \vec{B} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} | \nabla \times \\ | \nabla \times \\ | \nabla \times \\ | \end{array}$$

Benutze wieder $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$ und ähnlich für \vec{E} .

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\nabla^2 + \frac{\omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega)}{c^2} \right] \vec{B} = \vec{0} \\ \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right] \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Ansatz: $\vec{B}(\vec{x}, \omega) = \vec{B}_0(\omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$

\Rightarrow es gibt eine Lösung, falls $k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega)}{c^2}$, oder

$$\underbrace{\omega^2}_{\in \mathbb{R}} = \frac{c^2 k^2}{n^2}, \quad n := \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} = n_r(\omega) + i\alpha(\omega).$$

Wir nennen $\{n_r, \alpha\}$ die „optischen Konstanten“; n_r heisst Brechungsindex, die Kombination $\alpha := 2\alpha \frac{\omega}{c}$ ist als Absorptionskoeffizient bekannt.

Wichtig: $\omega^2, c^2 \in \mathbb{R}$, $n^2 \in \mathbb{C} \Rightarrow k^2 \in \mathbb{C}$!

Wir schreiben

$$\vec{k} = \vec{e}_0 \frac{\omega}{c} n = \vec{e}_0 \frac{\omega}{c} [n_r(\omega) + i\alpha(\omega)].$$

Dann ist die Bedingung $\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{n^2}$ erfüllt, und die Lösung lautet

$$\vec{B}(\vec{x}, \omega) = \vec{B}_0(\omega) e^{i \underbrace{\vec{e}_0 \cdot \vec{x} \frac{\omega}{c} n_r(\omega)}_{\text{ebene Welle in } \vec{e}_0\text{-Richtung}}} e^{-\underbrace{\vec{e}_0 \cdot \vec{x} \frac{\alpha(\omega)}{2}}_{\text{exponentieller Zerfall}}}$$

Bemerkung:

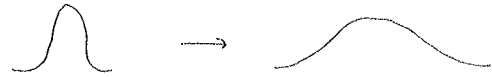
In der Energiestromdichte, d.h. Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ (vgl. Seite 46), gibt es zwei Felder, und folglich den exponentiellen Zerfall $\sim e^{-\vec{e}_0 \cdot \vec{x} \alpha(\omega)}$.

Dispersion:

Für $\kappa(\omega) = 0$ existiert eine Wellenlösung, falls $\omega^2 n_r^2(\omega) = c^2 k^2$ gilt (vgl. Seite 51). Wenn dies für ω gelöst wird, erhalten wir eine

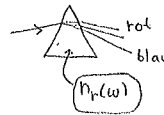
$$\omega = \omega(k) \quad \text{„Dispersionsrelation“}$$

Falls $n_r(\omega)$ nicht konstant ist, ist die Funktion $\omega(k)$ nichtlinear, was zu Dispersionseffekten führt.

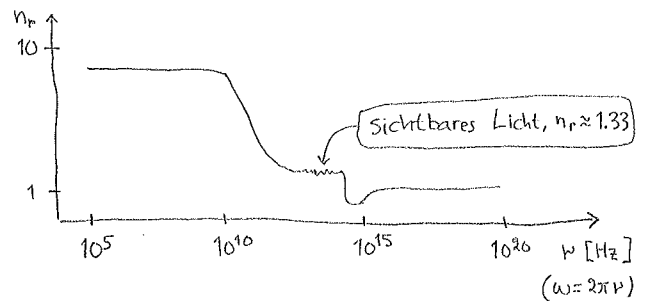


Außerdem sind Phasengeschwindigkeit $v_p := \frac{\omega(k)}{k}$ und Gruppengeschwindigkeit $v_G := \frac{d\omega(k)}{dk}$ ungleich.

Auch Brechung ist eine Folge:



Für Wasser:



Absorption / Dämpfung / Dissipation:

Für $\kappa(\omega) > 0$ verliert die Welle Energie an die Materie; die Materietemperatur steigt an, wie im Mikrowellenherd. Dies bedeutet auch, dass das Medium nicht transparent ist.

Für Wasser: $\alpha \left[\frac{1}{cm} \right]$

