# 5. Elektrodynamik in der Materie

Wir nehmen als Ausgangspunkt die kovarianten Maxwell-Gleichungen in der Lorenz-Eichung (Seiten 41 und 42), gekoppelt mit Lorentz-Kraft (Seite 44):

$$\begin{cases} \Box A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} J^\mu(x) = 4\pi \sum_a q_a \int d\tau_a \, \delta^{(4)}(x - x_a(\tau_a)) \, u_a^\mu(\tau_a), \\ m_a \frac{du_a^\mu(\tau_a)}{d\tau_a} = \frac{q_a}{c} F^{\mu\nu}(x) u_{a\nu}(\tau_a) + (\text{mögliche andere Kräfte}). \end{cases}$$

Die Herausforderung besteht darin, dass diese Gleichungen nicht unabhängig von einander sondern eben gekoppelt sind: die erzeugten $A^\mu$ beeinflussen $F^{\mu\nu}$, deshalb auch die Bewegungen der geladenen Teilchen, und somit die rechte Seite der ersten Gleichung, die bisher als eine gegebene Quelle behandelt wurde.

## 5.1 Linearer Response [TF 27, 28, 29]

Formales Argument: Stellen wir uns vor, dass die Lorentz-Kraft eine „kleine Störung" darstellt. Die Geschwindigkeiten der geladenen Teilchen können dann als

$$u_a^\mu = \bar{u}_a^\mu + \delta u_a^\mu$$

entwickelt werden, wobei die $\bar{u}_a^\mu$ eine Gleichung ohne $F^{\mu\nu}$ erfüllen, d.h.

$$m_a \frac{d\bar{u}_a^\mu}{d\tau_a} = 0 + (\text{mögliche andere Kräfte}).$$

In der ersten Ordnung* in kleinen Grössen gilt dann

$$m_a \frac{d\,\delta u_a^\mu}{d\tau_a} = \frac{q_a}{c} F^{\mu\nu}(x) \bar{u}_{a\nu}(\tau_a).$$

* Weil wir zur ersten Ordnung in $F^{\mu\nu}$ entwickeln, sprechen wir vom linearen Response.

Eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung kann immer gelöst werden. Folglich ist

$$J^\mu(x) = c \sum_a q_a \int d\tau_a \, \delta^{(4)}(x - x_a(\tau_a)) (\bar{u}_a^\mu + \delta u_a^\mu)$$

$$=: J^\mu_{\text{ext}}(x) + J^\mu_{\text{ind}}[F^{\mu\nu}](x),$$

wobei der erste Term $\bar{u}_a^\mu$ enthält, und der zweite $\delta u_a^\mu$ und deshalb $F^{\mu\nu}$. Setzen wir den zweiten Term auf der linken Seite, erhalten wir eine „effektive" Maxwell-Gleichung,

$$\{ \Box \delta^\mu{}_\alpha - C^\mu{}_\alpha \} A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} J^\mu_{\text{ext}}(x),$$

wobei $C^\mu{}_\alpha$ ein komplizierter Integral- bzw. Differenzialoperator sein kann, und $J^\mu_{\text{ext}}(x)$ jetzt unabhängig vom $F^{\mu\nu}$ ist.

## Praktische Implementierung für langsame Variationen ($\omega \ll \omega_0$)

Nehmen wir an, dass die Korrekturen aus $C^M_\alpha$ keine „Struktur" enthalten, d.h. neben $\Box$ einfach Konstanten sind. Traditionsgemäss kehren wir auch von Potentialen auf Felder zurück. Die korrigierten Felder in den inhomogenen* Gleichungen werden umbenannt:

*Die homogenen Gleichungen (MIII) und (MIV) bleiben unverändert.

$$\vec{E} + (\text{Korrektur}) =: \vec{D}$$
$$\vec{B} + (\text{Korrektur}) =: \vec{H} \;.$$

Damit erhalten wir

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{D} &\approx 4\pi\,\rho_{ext} && (\mathrm{MI})', \\ \nabla\times\vec{H} - \tfrac{1}{c}\,\dot{\vec{D}} &\approx \tfrac{4\pi}{c}\,\vec{j}_{ext} && (\mathrm{MII})'. \end{aligned}}$$

Um die Konsistenz dieser Änderung sicherzustellen, kann gecheckt werden, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho_{ext} + \nabla\cdot\vec{j}_{ext} = 0$$

erfüllt ist (vgl. Bemerkung auf Seite 3).

Energiestrom:

Führen wir die Betrachtung auf Seite 33 mit den geänderten Maxwell-Gleichungen durch:

$$-(\mathrm{MII})': \quad -\nabla\times\vec{H} + \tfrac{1}{c}\dot{\vec{D}} \approx -\tfrac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext} \quad \Big|\cdot\vec{E}$$
$$(\mathrm{MIII}): \quad \nabla\times\vec{E} + \tfrac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \quad \Big|\cdot\vec{H}$$

Summiere

$$\underbrace{\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}}_{\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}),\ \text{wie auf Seite 33}} + \frac{\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}}{c} = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{j}_{ext}\cdot\vec{E}$$

multipliziere durch $\frac{c}{4\pi}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}}{4\pi}}_{\partial_t e_{em}} + \underbrace{\frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})}_{\nabla\cdot\vec{S}} = \underbrace{-\vec{j}_{ext}\cdot\vec{E}}_{-\partial_t e_{mat}}$$

$\partial_t e_{em}$, wobei uns zur Bestimmung von $e_{em}$ noch die Proportionalitätskonstanten zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$ bzw. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ fehlen

$\nabla\cdot\vec{S}$, wobei $\vec{S} := \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$ einen verallgemeinerten Poynting-Vektor bezeichnet

$-\partial_t e_{mat}$, wie auf Seite 34

**Wellen mit $\omega \ll \omega_0$:**

Um die Maxwell-Gleichungen zu lösen, brauchen wir Modelle oder eine mikroskopische Rechnung für die Beziehungen $\vec{E} \leftrightarrow \vec{D}$ und $\vec{B} \leftrightarrow \vec{H}$.

Bei kleinen Kreisfrequenzen (und Wellenvektoren) können wir von einfachen Proportionalitätskonstanten ausgehen, die traditionsgemäss als

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \quad \varepsilon =: \text{Dielektrizitätskonstante} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \quad \mu =: \text{Permeabilitätskonstante} \end{aligned}}$$

definiert werden. Ohne Quellen ($\rho_{ext} = \vec{j}_{ext} = 0$) können dann Wellengleichungen wie auf Seite 28 hergeleitet werden, z.B.

$$(M\mathrm{II})': \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \vec{0} \qquad \Big| \; \nabla \times$$

$$\Longrightarrow -\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon}{c}\partial_t \underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{} = \vec{0}$$

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{H}}_{\frac{1}{\mu}\nabla \cdot \vec{B} = 0}) - \nabla^2 \vec{H}}$$

$$\boxed{(M\mathrm{III}): -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = -\frac{\mu}{c}\dot{\vec{H}}}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\right)\vec{H} = \vec{0}.$$

Diese ist eine homogene Wellengleichung, mit der <u>geänderten</u> Lichtgeschwindigkeit $c_{eff} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

**Was wenn $\omega \gtrsim \omega_0$?**

Falls das elektrische Feld sich rasch variiert, kann $\vec{D}(t)$ nicht sofort auf Änderungen von $\vec{E}(t)$ reagieren, sondern wird teilweise noch von „älteren" Werten bestimmt:

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \vec{E}(\vec{x},t) + \int_0^\infty d\tau \, f(\tau)\, \vec{E}(\vec{x}, t-\tau)$$

kausale bzw. retardierte Abhängigkeit (vgl. S. 39)

Es lohnt sich, diese Beziehung in Fourier-Darstellung auszudrücken:

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{\vec{D}}(\vec{x},\omega)\, e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{\vec{D}}(\vec{x},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \vec{D}(\vec{x},t)\, e^{i\omega t}.$$

Die Funktionen $\vec{E}(\vec{x},t)$ und $f(\tau)$ können ähnlich dargestellt werden.

$\longrightarrow$

Es folgt:

$$\tilde{\vec{D}}(\vec{x},\omega) = \tilde{\vec{E}}(\vec{x},\omega) + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \int_0^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, \vec{E}(\vec{x}, t-\tau)}_{\underbrace{\int_0^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, e^{i\omega\tau}}_{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \Theta(\tau) f(\tau) e^{i\omega\tau} =: \tilde{f}_{ret}(\omega)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega(t-\tau)} \vec{E}(\vec{x},t-\tau)}_{\boxed{\tilde{\vec{E}}(\vec{x},\omega)}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{D}}(\vec{x},\omega) = \varepsilon(\omega)\, \tilde{\vec{E}}(\vec{x},\omega)}, \quad \text{mit } \boxed{\varepsilon(\omega) := 1 + \tilde{f}_{ret}(\omega)}.$$

Wir nennen $\varepsilon(\omega)$ die „dielektrische Funktion".

Bemerkungen:

* Weil $\vec{E}$ und $\vec{D}$ reell sind, gilt $\tilde{\vec{E}}^*(\vec{x},\omega) = \tilde{\vec{E}}(\vec{x},-\omega)$ und $\tilde{\vec{D}}^*(\vec{x},\omega) = \tilde{\vec{D}}(\vec{x},-\omega)$, vgl. Seiten 30 und 31.
Es folgt

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega),$$

aber $\varepsilon(\omega)$ kann komplex sein. Schreiben wir $\varepsilon(\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$, erhalten wir

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\varepsilon(-\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega), & \text{d.h. gerade Funktion} \\ \mathrm{Im}\,\varepsilon(-\omega) = -\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega), & \text{d.h. ungerade Funktion} \end{cases}$$

* Die „alte" Dielektrizitätskonstante wird als

$$\varepsilon = \lim_{\omega\to 0} \varepsilon(\omega)$$

definiert. Weil $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$ ungerade ist, verschwindet es bei $\omega \to 0$, d.h. $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

* Wenn $\omega$ sehr gross ist, d.h. Schwingungen schnell sind (und dementsprechend kurze Wellenlängen haben), kann die Materie nicht mithalten. In diesem Limes müssen wir das Vakuumverhalten wiederfinden:

$$\lim_{\omega\to\infty} \varepsilon(\omega) = 1.$$

* Die selben Bemerkungen gelten für die Beziehung von $\vec{B}$ und $\vec{H}$, und insbesondere für die Permeabilitätsfunktion $\mu(\omega)$.

— o —