4.5 Relativistische Elektrodynamik [TF 18,22]

Zuletzt wollen wir alle Bausteine der Elektrodynamik in Vierer-Notation umschreiben.

4-Stromdichte: Wir definieren

$$J := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} .$$

Drücken wir die Komponenten mittels Punktladungen aus:

$$* \quad c\rho(x^0,\vec{x}) \overset{\text{Seite 1}}{=} c\sum_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_a(x^0))$$

$$= c\sum_a q_a \int dx_a^0\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_a(x_a^0))\,\delta(x^0-x_a^0)$$

$$= c\sum_a q_a \int d\tau_a\, \delta^{(4)}(x-x_a(\tau_a))\, \underbrace{\frac{dx_a^0}{d\tau_a}}_{U_a^0}$$

$$* \quad \vec{j}(x^0,\vec{x}) \overset{\text{Seite 23}}{=} \sum_a q_a\, \vec{v}_a(x^0)\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_a(x^0))$$

$$= \sum_a q_a \int dx_a^0\, \vec{v}_a(x_a^0)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_a(x_a^0))\,\delta(x^0-x_a^0)$$

$$= \sum_a q_a \int d\tau_a\, \delta^{(4)}(x-x_a(\tau_a))\, \underbrace{\vec{v}_a(x_a^0)\,U_a^0}_{c\vec{U}_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{J^\mu(x) = c\sum_a q_a \int d\tau_a\, \delta^{(4)}(x-x_a(\tau_a))\, U_a^\mu} .$$

Dies ist tatsächlich ein 4-Vektor, denn:

- $d\tau_a$ ist 4-Skalar (Eigenzeit)
- U_a^μ ist 4-Vektor
- $\delta^{(4)}(x-x_a) = \delta^{(4)}(x'-x_a')\left|\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right)\right| \overset{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}{=} \delta^{(4)}(x'-x_a')\,\underbrace{|\det\Lambda|}_{\Lambda\eta\Lambda^T=\eta \,\Rightarrow\, (\det\Lambda)^2=1 \,\Rightarrow\, |\det\Lambda|=1}$

$\Rightarrow$ ist 4-Skalar!

Kontinuitätsgleichung: Aus Seite 2:

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

$$\overset{\partial_t\rho = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0}}{\Rightarrow} \quad \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \sum_i \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}} .$$

4-Potential:

Wir definieren

$$A := \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}.$$

Jetzt kann die Lorenz-Eichbedingung in kovarianter Form ausgedrückt werden:

$$0 \overset{\text{Seite 27}}{=} \frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial \phi}{\partial x^0} + \sum_i \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \partial_\mu A^\mu .$$

So auch die Maxwell-Gleichungen aus Seite 27:

$$\begin{cases} \Box\phi = 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu},$$

wobei $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial^\mu \partial_\mu$ ein 4-Skalar ist.

Maxwell-Gleichungen mit 4-Potential aber mit allgemeiner Eichbedingung

Aus Seite 27:

$$\begin{cases} \Box\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}\right) = 4\pi\rho \\ \Box\vec{A} + \nabla\left(\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial_0 \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^0 \\ \partial_\mu \partial^\mu A^i + \partial_i \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^i \end{cases}$$

$\partial_0 = \partial^0, \quad \partial_i = -\partial^i$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu .$$

Wir definieren einen „Feldstärketensor" als

$$\boxed{F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu}.$$

Die Komponenten lauten

* $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c}\dot{A}^i + \partial_i \phi \overset{\text{Seite 26}}{=} -E^i$
* $F^{i0} = -F^{0i} = E^i$
* $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -(\partial_i A^j - \partial_j A^i)$

Vergleiche mit $B^i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A^k$ [aus $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$]

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Maxwell-Gleichungen ohne Potentiale (d.h. direkt mit Feldern)

Definition: Sei ein Feldstärketensor gegeben durch

$$\begin{cases} F^{i0} := -F^{0i} := E^i \\ F^{ij} := -F^{ji} := -\varepsilon_{ijk} B^k \\ \text{sonst null} \end{cases}$$

Maxwell I:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \iff \partial_i E^i = \frac{4\pi}{c}\rho c \iff \boxed{\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} J^0} .$$

Maxwell II:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \iff \varepsilon_{ijk}\partial_j B^k - \partial_0 E^i = \frac{4\pi}{c} J^i$$

$$\iff \partial_j \underbrace{(-\varepsilon_{ijk} B^k)}_{F^{ji}} + \partial_0 \underbrace{(-E^i)}_{F^{0i}} = \frac{4\pi}{c} J^i$$

$$\iff \boxed{\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} J^i} .$$

Maxwell III:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \vec{0}$$

Es gilt $B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$, denn $\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkm}B^m = \delta_{im}B^m$

Aufgabe 3.3

$$\iff \varepsilon_{ijk}\partial_j E^k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_0 F^{jk} = 0$$

Wir können schreiben: $\varepsilon_{ijk}\partial_j F^{k0} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\partial^j F^{k0} + \partial^k F^{0j})$

$j \leftrightarrow k$

$$\iff -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\partial^0 F^{jk} + \partial^j F^{k0} + \partial^k F^{0j}) = 0$$

multipliziere durch ε_{imn}, benutze $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk} = \delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}$

$$\iff \boxed{\partial^0 F^{mn} + \partial^m F^{n0} + \partial^n F^{0m} = 0 \quad \forall\, m,n}$$

Maxwell IV:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \partial_m \varepsilon_{mij} F^{ij} = 0$$

$$\iff \varepsilon_{mij}(\partial^m F^{ij} + \partial^i F^{jm} + \partial^j F^{mi}) = 0$$

zyklische Umnennungen von Indizen

$$\iff \boxed{\partial^m F^{ij} + \partial^i F^{jm} + \partial^j F^{mi} = 0 \quad \forall\, m,i,j}$$

weil Ausdruck innerhalb von Klammern sowieso antisymmetrisch in allen Umtauschen von Indizen ist

Bemerkung: (M III) und (M IV) gemeinsam sind eine „Bianchi-Identität":

$$\boxed{\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \quad \forall\, \mu,\nu,\rho}$$

Es kann gecheckt werden, dass diese mit Potentialen ($F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$) automatisch erfüllt ist:

$$\cancel{\partial^\mu \partial^\nu} A^\rho - \cancel{\partial^\mu \partial^\rho} A^\nu + \partial^\nu \partial^\rho A^\mu - \cancel{\partial^\nu \partial^\mu} A^\rho + \cancel{\partial^\rho \partial^\mu} A^\nu - \partial^\rho \partial^\nu A^\mu = 0 .$$

Lorentz-Kraft: Wir erinnern uns an die Bewegungsgleichung aus Seite 3:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

Eigenzeit: $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$

$E^i = F^{i0}$

$$(\vec{v}\times\vec{B})^i = \varepsilon_{ijk} v^j B^k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} v^j \varepsilon_{kmn} F^{mn}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) v^j F^{mn}$$
$$= -\frac{1}{2} v^j F^{ij} + \frac{1}{2} v^j F^{ji} = F^{ij} v_j$$

$$\Rightarrow \frac{dp^i}{d\tau} = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\left(F^{i0} + \frac{1}{c}F^{ij}v_j\right) = \frac{q}{c}F^{i\mu}u_\mu .$$

Was passiert mit der 0-Komponente?

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{c}\underbrace{\frac{\partial E}{\partial p^i}}_{v^i}\frac{dp^i}{d\tau}$$

$$= \frac{1}{c}v^i\frac{q}{c}F^{i\mu}u_\mu$$

$u_j = -u^j = -\frac{v^j}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{q}{c^2}\left\{v^i F^{i0} u_0 - \frac{v^i F^{ij} v^j}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\right\}$$

$v^i v^j$ ist symmetrisch unter $i \leftrightarrow j$, F^{ij} ist antisymmetrisch

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{q}{c^2} v^i F^{i0}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{q}{c}u^i F^{i0} = \frac{q}{c}F^{0i}u_i .$$

Insgesamt: $\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu}$.

Fazit: Alles wird einfacher und schöner in der 4-Notation!