

4.4 Strahlung [TF 23, 24]

Erinnern wir uns an die Wellengleichungen in der Lorenz-Eichung (Seite 27):

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \phi = 4\pi s, \\ \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \frac{1}{c} \dot{\phi} + \nabla \cdot \vec{A} = 0, \\ \square \chi = 0. \end{array} \right.$$

Allgemeine Lösung:

Aus MMPI und MMPII soll ein schöner Satz bekannt sein:
 allgemeine Lösung einer inhomogenen Gleichung
 = allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (d.h. $s = \vec{j} = 0$)
 + spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Die letztere beschreibt Strahlung wegen $s, \vec{j} \neq 0$, und kann mit Greenschen Funktionen (Kap. 2.2) konstruiert werden.

Betrachtet sei eine reelle Funktion G , mit (vgl. Seite 9)

$$\square_x G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = 4\pi s^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \delta(t-t'). \quad (*)$$

Wir bezeichnen $\vec{r} := \vec{x}-\vec{x}'$, $\tau := t-t'$ und Fourier-transformieren bzgl. der Zeitkoordinate τ :

$$G(\vec{r}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega\tau},$$

$$\tilde{G}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(\vec{r}, \tau) e^{i\omega\tau}.$$

Nach Einsatz in Gleichung (*) erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \nabla^2 \right) \tilde{G}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega\tau} = 4\pi s^{(3)}(\vec{r}) \delta(\tau)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega'^2}{c^2} + \nabla^2 \right) \tilde{G}(\vec{r}, \omega') = -4\pi s^{(3)}(\vec{r}) \quad \forall \omega'$$

multipliziere durch $e^{i\omega'\tau}$
 und integriere über τ
 \Rightarrow

Für $\omega \rightarrow 0$ ist dies dieselbe Gleichung wie auf Seite 9! Deshalb wissen wir schon, dass

$$\lim_{\omega' \rightarrow 0} \tilde{G}(\vec{r}, \omega') = \frac{1}{r}, \quad r := |\vec{r}|,$$

als Grenzwert gelten muss. Die Abhängigkeit von ω' muss noch bestimmt werden.

Ansatz:

Wir nehmen an, dass aus Symmetriegründen $\tilde{G}(\vec{r}, \omega)$ nur von r abhängig ist. Für $r \neq 0$ erhalten wir in Kugelkoordinaten folglich

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G} = 0, \quad r \neq 0.$$

Behauptung:

Die allgemeine Lösung lautet $\tilde{G} = \frac{Ae^{i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r}$.

Beweis:

$$\partial_r \tilde{G} = - \frac{Ae^{i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r^2} + \frac{i\omega}{c} \frac{Ae^{i\frac{\omega}{c}r} - Be^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r}$$

$$\partial_r^2 \tilde{G} = \frac{2}{r^3} (Ae^{i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r}) - \frac{2i\omega}{c} \frac{Ae^{i\frac{\omega}{c}r} - Be^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{Ae^{i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \tilde{G} = - \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{G} \Rightarrow \square.$$

Grenzwert:

Um auch das Verhalten beim $r \rightarrow 0$ (und nicht nur $r \neq 0$) korrekt zu beschreiben, bemerken wir, dass dieser Grenzwert per Zufall dem Grenzwert $\omega \rightarrow 0$ entspricht:

$$\tilde{G} \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{A+B}{r} + \mathcal{O}(1) \stackrel{!}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{G} \stackrel{\text{Seite 37}}{=} \frac{1}{r}.$$

Es muss also $A+B=1$ gelten.

Zwischenbilanz:

Im Gegensatz zum statischen Limes (vgl. Seite 10) ist die Greensche Funktion jetzt nicht eindeutig: es gilt $A+B=1$, aber A und B können nicht separat fixiert werden, es sei denn, weitere Bedingungen werden eingeführt (vgl. Seite 39).

Rücktransformation: Für die Zeitabhängigkeit erhalten wir

$$G(\vec{r}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{Ae^{i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r} e^{-i\omega z} \Big|_{A+B=1}$$

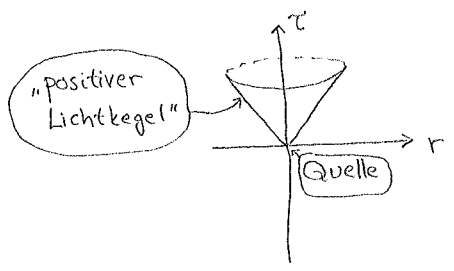
$$= \frac{A \delta\left(\frac{r}{c} - z\right) + B \delta\left(\frac{r}{c} + z\right)}{r} \Big|_{A+B=1}.$$

Interpretationen:

* Der Fall $B=0$, d.h.

$$G(\vec{r}, r) = G_{\text{ret}}(\vec{r}, r) := \frac{\delta(\frac{r}{c} - \tau)}{r}$$

ist nichtverschwindend nur bei $\tau > 0$, und wird eine „retardierte Greensche Funktion“ genannt. Die Information erreicht den Abstand $|\vec{x} - \vec{x}'| = r$ am Zeitpunkt $t - t' = \frac{r}{c}$, d.h. propagiert mit der Lichtgeschwindigkeit c in die positive Zeitrichtung („Kausalität“). Diese Wahl ist relevant für die Strahlung.



* Der Fall $A=0$, d.h.

$$G(\vec{r}, r) = G_{\text{adv}}(\vec{r}, r) := \frac{\delta(\frac{r}{c} + \tau)}{r}$$

ist nichtverschwindend nur bei $\tau < 0$, und wird eine „avancierte Greensche Funktion“ genannt.

Anwendung:

Kehren wir zurück zu den Maxwell-Gleichungen aus Seite 37, insbesondere

$$\square \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t)$$

Eine spezielle Lösung kann jetzt als

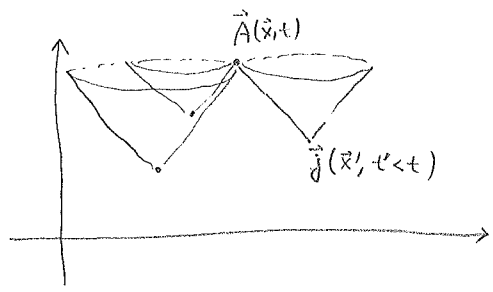
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' G_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \vec{j}(\vec{x}', t')$$

dargestellt werden, denn

$$\begin{aligned} \square \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' \underbrace{\square G_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')}_{4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')} \vec{j}(\vec{x}', t') \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Desweiteren können wir über t' integrieren:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} - t + t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{j}(\vec{x}', t') \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$



Dies zeigt, wie nur Ströme entlang des vergangenen Lichtkegels einen Beitrag liefern können.

Multipolentwicklung: Betrachtet wird eine „monochromatische“ Quelle,

$$\vec{j}(\vec{x}', t') := \text{Re} [\vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}], \quad \omega = ck$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{c} \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right].$$

Falls die Quelle lokalisiert ist und $|\vec{x}| \gg \max(|\vec{x}'| \leq V)$ gilt, können wir die Näherung $|\vec{x}-\vec{x}'| \approx |\vec{x}| =: r$ anwenden (vgl. Seite 13)

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}, t) \approx \text{Re} \left[\frac{e^{-i\omega t + ikr}}{cr} \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \right].$$

Hier führen wir ein paar Tricks ein:

Gaußscher Satz sowie die Annahme $\vec{j}|_{\partial V} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} * \quad 0 &= \int_V d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^i} (x'^k j^i) = \int_V d^3x' (\delta_{ik} j^k + x'^k \nabla_i \cdot \vec{j}) \\ &\Rightarrow \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') = - \int_V d^3x' \vec{x}' (\nabla \cdot \vec{j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad \text{Kontinuitätsgleichung } \partial_t s + \nabla \cdot \vec{j} &= 0 \text{ mit } \\ s(\vec{x}', t') &:= \text{Re} [s(\vec{x}') e^{-i\omega t'}], \quad \vec{j}(\vec{x}', t') := \text{Re} [\vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}] \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} &= -\partial_t s = \text{Re} [i\omega s(\vec{x}') e^{-i\omega t'}]. \end{aligned}$$

Benutzen wir die beiden, erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \approx \text{Re} \left[\frac{e^{-i\omega t + ikr}}{cr} (-i\omega) \int_V d^3x' \vec{x}' s(\vec{x}') \right]$$

Laut Seite 13 ist dies genau das elektrische Dipolmoment \vec{p} !

$$\begin{matrix} k = \frac{\omega}{c} \\ \Downarrow \\ k \vec{p} \frac{\sin(-\omega t + kr)}{r} \end{matrix}$$

Das Ergebnis, eine auslaufende Kugelwelle, ist das Vektorpotential der Dipolstrahlung. Dagegen gibt es keine Strahlung aus einem „Monopol“ bzw. Gesamtladung!

Die physikalischen Felder \vec{E} und \vec{B} der Dipolstrahlung werden in Aufgabe 9.2 bestimmt.