4.3 Energiedichte und Energiestromdichte des Feldes [TF 16]

Wir haben im Kapitel 2.1 (Seite 8) festgestellt, dass ein statisches elektrisches Feld eine Energiedichte besitzt, $e(\vec{x}) = \frac{\vec{E}^2(\vec{x})}{8\pi}$. Das Ziel ist jetzt, diesen Ausdruck für den dynamischen Fall zu verallgemeinern.

Herleitung: Ausgangspunkt sind $-$(MII) und (MIII):

$$-\nabla\times\vec{B} + \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Big|\cdot\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \vec{0} \qquad \Big|\cdot\vec{B}$$

Summiere

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})} + \frac{\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \vec{B}\cdot\dot{\vec{B}}}{c} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}$$

Die Summe beträgt $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$, denn:
$\varepsilon_{ijk}\partial_i(E^jB^k) = \varepsilon_{ijk}(\partial_i E^j B^k + E^j\partial_i B^k)$
$= B^k\varepsilon_{kij}\partial_i E^j - E^j\varepsilon_{jik}\partial_i B^k$
$= \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})$.

$\frac{1}{2c}\partial_t(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{B})$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \partial_t\frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}.$$

multipliziere durch $\frac{c}{4\pi}$

Wenn wir jetzt die Definitionen

$$e_{em} := \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2),$$

$$\vec{S} := \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{„Poynting-Vektor"}$$

einführen, erhalten wir das Poynting-Theorem:

$$\boxed{\partial_t e_{em} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}}\,.$$

Die linke Seite hat die Form einer Kontinuitätsgleichung (Seite 2). Die Grösse e_{em} wäre dann die Energiedichte, während $\vec{S}$ die Energiestromdichte beschreiben würde.

Um diese Interpretation zu akzeptieren, müssen wir allerdings die Bedeutung des Terms auf der rechten Seite verstehen!

Materiebeitrag: Weil der Term auf der rechten Seite die Ladungsstromdichte enthält, liegt es nahe, die Energiedichte von geladenen Teilchen zu betrachten. Für eine Menge von Punktladungen („Materie") gilt

$$\frac{dE_{mat}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{\vec x_a\in V}\frac{m_a\vec v_a^{\,2}}{2} = \sum_{\vec x_a\in V}\vec v_a\cdot\dot{\vec p}_a$$

$$\overset{\text{Newton II}}{=} \sum_{\vec x_a\in V}\vec v_a\cdot\vec F_a$$

$$\overset{\text{Lorentz-Kraft (Seite 3)}}{=} \sum_{\vec x_a\in V} q_a\vec v_a\cdot\left[\vec E(\vec x_a)+\frac{\vec v_a}{c}\times\vec B(\vec x_a)\right]$$

$$\overset{\vec v_a\cdot(\vec v_a\times\vec B)=0}{=} \sum_{\vec x_a\in V} q_a\vec v_a\cdot\vec E(\vec x_a)\,.$$

Die Ladungsstromdichte lautet (vgl. Seite 23)

$$\vec j = \sum_a q_a\vec v_a\,\delta^{(3)}(\vec x-\vec x_a)\,.$$

Folglich gilt

$$\int_V d^3\vec x\;\vec j(\vec x)\cdot\vec E(\vec x) = \sum_{\vec x_a\in V} q_a\vec v_a\cdot\vec E(\vec x_a)\overset{!}{=}\frac{dE_{mat}}{dt}\,.$$

Wenn wir das Poynting-Theorem (Seite 33) über ein Volumen integrieren, und die Gesamtenergie der elektromagnetischen Felder als $E_{em} := \int_V d^3\vec x\; e_{em}$ bezeichnen, erhalten wir

$$\frac{dE_{em}}{dt} + \int_V d^3\vec x\;\nabla\cdot\vec S = -\frac{dE_{mat}}{dt}$$

$$\overset{\text{Gaußscher Satz}}{\Longleftrightarrow}\quad \boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{em}+E_{mat}\right) = -\int_{\partial V} d\vec f\cdot\vec S\,.}$$

Interpretation: Die Energie E_{em} der elektromagnetischen Felder kann sich dadurch ändern, dass Energie auf die geladenen Teilchen übertragen wird, oder dass elektromagnetische Energie die Oberfläche durchkreuzt.

— o — o —

Beispiel:

Bewerten wir die Energiedichte und die Energiestromdichte einer ebenen Welle (vgl. Seite 32).

Bei einer <u>linear polarisierten Welle</u> sei $\vec{\lambda} := i k_0 \vec{\varepsilon}(\vec{k}_0)$ ein <u>reeller</u> Vektor.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\lambda}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right]_{\omega := \omega_{k_0}} \\ \qquad = \vec{\lambda} \cos(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x}), \\ \vec{B}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{n}\times\vec{\lambda}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \right]_{\vec{n} := \frac{\vec{k}_0}{k_0}} \\ \qquad = \vec{n}\times\vec{\lambda} \cos(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x}). \end{cases}$$

Wegen $\vec{k}_0 \perp \vec{\varepsilon}(\vec{k}_0)$ (vgl. Seite 32) gilt $\vec{n} \perp \vec{\lambda}$, und deshalb auch $|\vec{n}\times\vec{\lambda}| = |\vec{n}||\vec{\lambda}| = |\vec{\lambda}|$.

Folglich erhalten wir die Energiedichte

$$e_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{|\vec{\lambda}|^2}{4\pi} \cos^2(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x}).$$

Physikalisch sinnvoll ist eine zeitgemittelte Energiedichte:

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{|\vec{\lambda}|^2}{8\pi}.$$

Die Energiestromdichte kann als

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}\times\vec{B}$$

$$= \frac{c}{4\pi} \vec{\lambda}\times(\vec{n}\times\vec{\lambda}) \cos^2(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x})$$

wie auf Seite 20: $\vec{\lambda}\times(\vec{n}\times\vec{\lambda}) = \vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda}\,\vec{n} - \underbrace{\vec{\lambda}\cdot\vec{n}}_{0}\,\vec{\lambda}$

$$= \frac{c}{4\pi} |\vec{\lambda}|^2 \vec{n} \cos^2(-\omega t + \vec{k}_0\cdot\vec{x})$$

geschrieben werden, und die Zeitmittelung ergibt

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\vec{\lambda}|^2}{8\pi} c\vec{n}.$$

Wenn wir mit Stromdichte vergleichen, d.h. $\vec{j} = \rho\vec{v}$ (vgl. Seite 2), können wir erschliessen, dass eine ebene Welle Energie mit der Lichtgeschwindigkeit c in die Richtung $\vec{n}$ transportiert.

Impulsdichte:

Neben Energiedichte und Energiestromdichte können auch Impulsdichte und Impulsstromdichte definiert werden. Dazu betrachten wir die Lorentzkraftdichte aus Seite 3:

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}$$
$$\overset{\text{(MI) und (MII)}}{=} \frac{1}{4\pi}\left\{ (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{1}{c}\underbrace{\dot{\vec{E}}\times\vec{B}}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{E}\times\dot{\vec{B}} \overset{\text{(MIII)}}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + c\,\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{ \underbrace{(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} - \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})} + \underbrace{(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}} - \frac{1}{c}\partial_t(\vec{E}\times\vec{B}) \right\}.$$

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_i\left[(\partial_j E^j)E^i - \varepsilon_{ijk}E^j\varepsilon_{kmn}\partial_m E^n\right]\\
&= \vec{e}_i\left[(\partial_j E^j)E^i - E^j\partial_i E^j + E^j\partial_j E^i\right]\\
&= \vec{e}_i\left[\partial_j(E^iE^j) - \tfrac{1}{2}\partial_i(E^jE^j)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jmn}(\partial_m B^n)B^k\\
&= \vec{e}_i\left[(\partial_k B^i)B^k - (\partial_i B^k)B^k\right]\\
&= \vec{e}_i\left[\partial_k(B^iB^k) - \tfrac{1}{2}\partial_i(B^kB^k)\right]
\end{aligned}$$

Nehmen wir die i-Komponente und setzen den letzten Term auf der linken Seite, erhalten wir

$$\partial_t\left(\frac{S^i}{c^2}\right) + f_L^i = \frac{1}{4\pi}\partial_j\left\{ E^iE^j + B^iB^j - \frac{\delta_{ij}}{2}\left(E^kE^k + B^kB^k\right)\right\}.$$

Hier ist $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$ der Poynting-Vektor (vgl. Seite 33).

Die Interpretation ist wie auf Seite 34, aber jetzt in differenzieller Form: $\partial_t g^i_{em} + f^i_L = \partial_j T^{ij}_{em}$,

* $g^i_{em} := \dfrac{S^i}{c^2}$:= Impulsdichte der Felder in i-Richtung

* f_L^i = Kraftdichte auf Materie
  $\overset{!}{=}$ Zeitableitung der Impulsdichte der Materie (Newton II)

* $T^{ij}_{em} := \frac{1}{4\pi}\left(E^iE^j + B^iB^j\right) - \frac{\delta_{ij}}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$
  =: Minus die Impulsstromdichte der Felder
  =: „Spannungstensor".

(Eine merkwürdige Eigenschaft kann verifiziert werden:

$$e_{em} + \sum_i T^{ii}_{em} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)(1+2-3) \overset{!}{=} 0.\quad)$$

——— ∘ ——— ∘ ———