4.2 Elektromagnetische Wellen [TF 20]

Wir betrachten Wellengleichungen im Vakuum ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$), mit $\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$.

Mit Potentialen (Seite 27):

$$\begin{cases} \Box\phi = 0 & \text{(Skalarpotential)} \\ \Box\vec{A} = \vec{0} & \text{(Vektorpotential)} \\ \frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} = 0 & \text{(Lorenz-Eichung)} \\ \Box\chi = 0 & \text{(überbleibende Redundanz)} \end{cases}$$

Es gibt vier Felder ($\phi, \vec{A}$) mit zwei zusätzlichen Bedingungen, d.h. zwei unabhängige „Freiheitsgrade".

Mit Feldern (Seite 28):

$$\begin{cases} \Box\vec{B} = \vec{0} & \text{(magnetische Induktion)} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 & \text{(M IV)} \\ \dot{\vec{E}} = c\nabla\times\vec{B} & \text{(M II)} \end{cases}$$

Es gibt drei Felder ($\vec{B}$) mit einer zusätzlichen Bedingung, d.h. zwei unabhängige Freiheitsgrade. Das elektrische Feld $\vec{E}$ folgt von $\vec{B}$!

Ebene Wellen: Wir betrachten die Wellengleichung zuerst für eine reelle Funktion f (z.B. $f=\phi$), und nehmen an, dass die Lösung nur von z abhängt. Die Welle ist dann konstant bzgl. x,y, d.h. eine Ebene.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_z^2\right)f = \left(\frac{1}{c}\partial_t - \partial_z\right)\left(\frac{1}{c}\partial_t + \partial_z\right)f = 0.$$

Wir führen neue Variablen ein:

$$\xi := ct - z, \quad \eta := ct + z$$

$$\Rightarrow t = \frac{\xi + \eta}{2c}, \quad z = \frac{\eta - \xi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\xi = \frac{\partial t}{\partial \xi}\partial_t + \frac{\partial z}{\partial \xi}\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\partial_t - \partial_z\right) \\ \partial_\eta = \frac{\partial t}{\partial \eta}\partial_t + \frac{\partial z}{\partial \eta}\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\partial_t + \partial_z\right) \end{cases}$$

Mit den neuen Variablen erhält die Wellengleichung eine einfache Form:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0.}$$

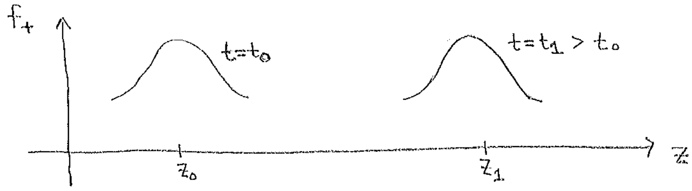
→

Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung von $\partial_\xi \partial_\eta f = 0$ kann als

$$f = f_+(\xi) + f_-(\eta) = f_+(ct-z) + f_-(ct+z)$$

geschrieben werden, mit beliebigen Funktionen f_+ und f_-.

Interpretation: Die Funktion f_+ hat für alle Raumzeitpunkte (t,z) mit $z = ct +$ Konstante denselben Wert:



Die Bedingung kann auch als $z_1 - z_0 = c(t_1 - t_0)$ ausgedrückt werden.

In anderen Worten, f_+ beschreibt eine Welle, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c in die positive z-Richtung ausbreitet.

Die Funktion f_- hat für alle Raumzeitpunkte mit $z = -ct +$ Konstante denselben Wert, und beschreibt eine Welle, die sich mit c in die negative z-Richtung ausbreitet.

Die allgemeine Lösung ist eine Superposition von rechts- und linkslaufenden Wellen.

Allgemeiner Fall: Die allgemeine Lösung von $\Box f = 0$ kann mit Hilfe von Fourier-Transformationen dargestellt werden.

Zur Erinnerung:

* $f(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

* $\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, f(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

* $\int d^3\vec{x}\, e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$

* $\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \vec{e}_j \partial_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \vec{e}_j (ik^j) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$\Rightarrow \nabla f(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k})\, i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

* $f^*(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f}^*(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$\qquad = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f}^*(-\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$.

Substitution $\vec{k} \to -\vec{k}$

Einsatz in Gleichung:

Wir nehmen die Fourier-Darstellung als Lösungsansatz für $\Box f = 0$:

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\right)\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0$$

benutze Regeln aus Seite 30

$$\Rightarrow \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \tilde{f}(\vec{k},t) + k^2 \tilde{f}(\vec{k},t)\right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0$$

multipliziere durch $e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}$ und integriere über $\vec{x}$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \tilde{f}(\vec{q},t) + \omega_q^2 \tilde{f}(\vec{q},t) = 0 \quad \forall\, \vec{q}, \text{ mit } \omega_q := c|\vec{q}|$$

Hier steht die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Die allgemeine Lösung ist wohl bekannt:

$$\tilde{f}(\vec{q},t) = \tilde{f}_+(\vec{q})\, e^{-i\omega_q t} + \tilde{f}_-(\vec{q})\, e^{i\omega_q t}.$$

Weil $f(\vec{x},t)$ reell ist, d.h. $f^* = f$, gilt (vgl. Seite 30)

$$\tilde{f}^*(-\vec{q},t) = \tilde{f}(\vec{q},t)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_+^*(-\vec{q})\, e^{i\omega_q t} + \tilde{f}_-^*(-\vec{q})\, e^{-i\omega_q t} = \tilde{f}_+(\vec{q})\, e^{-i\omega_q t} + \tilde{f}_-(\vec{q})\, e^{i\omega_q t}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_-(\vec{q}) = \tilde{f}_+^*(-\vec{q}) \quad \forall\, \vec{q}.$$

So können wir die allgemeine Lösung als

$$f(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\tilde{f}_+(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \tilde{f}_+^*(-\vec{k})\, e^{i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$\vec{k} \to -\vec{k}$ im zweiten Term

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\tilde{f}_+(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \tilde{f}_+^*(\vec{k})\, e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, a(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right], \quad a(\vec{k}) := 2\tilde{f}_+(\vec{k}),$$

schreiben, mit einer beliebigen komplexen $a(\vec{k})$.

Die Funktion $a(\vec{k})$ könnte durch Anfangsbedingungen fixiert werden:

$$f(\vec{x},0) = \mathrm{Re}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right],$$

$$\partial_t f(\vec{x},0) = \frac{1}{2}\cdot\partial_t \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[a(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{k})\, e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[-i\omega_k a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + i\omega_k a^*(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \omega_k\, a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$:

Aus der allgemeinen Lösung von $\Box f = 0$ können $\phi, \vec{A}$ und dann auch $\vec{E}, \vec{B}$ konstruiert werden. Mit der Notation $\int_{\vec{k}} := \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$ folgt:

$$* \quad \Box\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} a(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$

$$* \quad \Box\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} \vec{b}(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$

$$* \quad \Box\chi = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} d(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$

Wir betrachten jetzt $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi}$, $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ und wählen dabei $d(\vec{k}) := ic\,a(\vec{k})/\omega_k$:

$$* \quad \phi' = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} \underbrace{\left\{a(\vec{k}) - \frac{1}{c}(-i\omega_k)\frac{ic\,a(\vec{k})}{\omega_k}\right\}}_{0} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

$$* \quad \vec{A}' = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} \underbrace{\left\{\vec{b}(\vec{k}) + i\vec{k}\,\frac{ic\,a(\vec{k})}{\omega_k}\right\}}_{\boxed{\vec{b}(\vec{k}) - \frac{\vec{k}}{k}a(\vec{k}) =: \vec{\varepsilon}(\vec{k})}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$

Hier heisst $\vec{\varepsilon}(\vec{k})$ der Polarisationsvektor.

Ausserdem müssen wir noch die Lorenz-Eichbedingung erfüllen, d.h. $\frac{1}{c}\dot{\phi}' + \nabla\cdot\vec{A}' \underset{\phi'=0}{=} \nabla\cdot\vec{A}' = 0$:

$$* \quad \nabla\cdot\vec{A}' = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} \vec{\varepsilon}(\vec{k})\cdot i\vec{k}\; e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \overset{!}{=} 0.$$

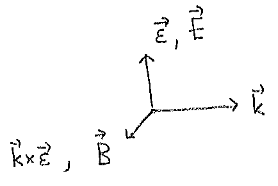
Dazu wählen wir $\vec{\varepsilon}(\vec{k}) \perp \vec{k} \;\; \forall \vec{k}$, d.h. $\boxed{\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(\vec{k}) = 0}$.

Wir sagen, dass Licht (bzw. elektromagnetische Welle) transversal polarisiert ist, bzgl. Bewegungsrichtung ($\vec{k}$).

Letztendlich können noch die Felder $\vec{E} = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}' \underset{\phi'=0}{=} -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}'$ und $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}'$ bestimmt werden:

$$* \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}' = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} \underbrace{\frac{i\omega_k}{c}}_{\frac{\omega_k}{c}=k} \vec{\varepsilon}(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$

$$* \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}' = \mathrm{Re}\left[\int_{\vec{k}} i\vec{k}\times\vec{\varepsilon}(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right].$$



Es gilt $|k\,\vec{\varepsilon}(\vec{k})| = |\vec{k}\times\vec{\varepsilon}(\vec{k})|$, denn $\vec{k} \perp \vec{\varepsilon}(\vec{k})$.

Falls nur ein Wert von $\vec{k}$ einen Beitrag liefert, d.h. $\vec{\varepsilon}(\vec{k}) \propto \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_0)$, geht es um eine ebene monochromatische Welle.
