4. Zeitabhängige Phänomene

Wir greifen jetzt die vollen Maxwell-Gleichungen an: (Seiten 2,3):

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \qquad (\text{M I})$$

$$\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (\text{M II})$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \vec{0} \qquad (\text{M III})$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (\text{M IV})$$

$$\dot{\rho} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \qquad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

4.1 Grundgesetze, elektrodynamische Potentiale, Eichinvarianz [TF 16,17]

Neuer Term in (M II):

Setzen wir $-\frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$ auf der rechten Seite, erhalten wir

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{\dot{\vec{E}}}{4\pi}\right)$$

wie in der Magnetostatik

„Verschiebungsstrom", von Maxwell gefunden wegen Forderung nach Konsistenz mit $\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0$ (vgl. Seite 3).

Der neue Term spielt eine entscheidende Rolle im Zusammenhang mit elektromagnetischen Wellen (vgl. Seite 28).

Neuer Term in (M III):

Setzen wir $\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$ auf der rechten Seite, erhalten wir

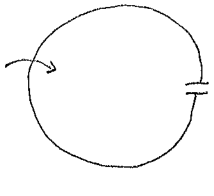
$$\nabla\times\vec{E} = \vec{0} - \frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$$

wie in der Elektrostatik

„Faradaysches Induktionsgesetz"

Der neue Term spielt eine entscheidende Rolle für die Stromerzeugung:

Fläche F



$$\text{Spannung} := \oint d\vec{x}\cdot\vec{E}$$

Stokesscher Satz

$$= \int_F d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{E}$$

Faraday

$$= -\frac{1}{c}\int_F d\vec{f}\cdot\dot{\vec{B}}$$

F zeitunabhängig

$$= -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_m}{dt},$$

wobei $\Phi_m := \int_F d\vec{f}\cdot\vec{B}$ der magnetische Fluss durch die Drahtschleife ist.

Potentiale:

Das Skalarpotential ϕ (vgl. Seite 5) sowie das Vektorpotential $\vec{A}$ (vgl. Seite 17) können auch im zeitabhängigen Fall verwendet werden. Dazu betrachten wir zuerst die homogenen Maxwell-Gleichungen (MIII) und (MIV):

* $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ wie in der Magnetostatik (Seite 17)

  $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$, $\vec{A}$ = Vektorpotential.

  Dieses $\vec{A}$ ist aber nicht eindeutig, sondern $\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi}$, mit beliebigem χ, ergibt dasselbe $\vec{B}$.

* $\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \vec{0}$

  $\xRightarrow{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}} \nabla\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) = \vec{0}$.

  Dies ist wie in der Elektrostatik (Seite 3), aber mit der Kombination $\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ statt $\vec{E}$.

  $\Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = -\nabla\phi$, ϕ = Skalarpotential

  $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}}$.

Eichtransformationen:

Was passiert unter der Transformation $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$? Das elektrische Feld $\vec{E}$ darf sich auch nicht ändern!

Es ist leicht zu sehen, dass auch ϕ jetzt geändert werden muss, und zwar als $\boxed{\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi}}$.

Denn:

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}'$$
$$= -\nabla\phi + \frac{1}{c}\cancel{\nabla\dot{\chi}} - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} - \frac{1}{c}\cancel{\nabla\dot{\chi}}$$
$$= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = \vec{E} \quad \Rightarrow \Box.$$

Beispiel:

Ein System mit $\vec{E}$ = Konstante, $\vec{B} = \vec{0}$ kann entweder mit

$$\phi = -\vec{x}\cdot\vec{E}, \quad \vec{A} = 0$$

oder mit

$$\phi' = 0, \quad \vec{A}' = -ct\vec{E}$$

dargestellt werden. Die Eichfunktion dazwischen beträgt

$$\chi = -ct\,\vec{x}\cdot\vec{E}.$$

Wellengleichungen:

Betrachten wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (MI) und (MII) nach Einsatz von Potentialen.

$$* \quad \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad \xrightarrow{\boxed{\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}}} \quad -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\nabla\cdot\dot{\vec{A}} = 4\pi\rho$$

$$\Rightarrow -\nabla^2\phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}\right) = 4\pi\rho .$$

$$* \quad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \xrightarrow[\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}]{\boxed{\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}}} \quad \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) + \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} + \nabla\left(\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} .$$

Seite 17: $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

Wir können die Eichfreiheit benutzen, um die Gleichungen zu vereinfachen. Eine Möglichkeit:*

$$\boxed{\frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} = 0} \qquad \text{„Lorenz-Eichung"} .$$

Mit dieser Wahl erhalten wir Wellengleichungen:

$$\boxed{\begin{cases} \underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)}_{=:\,\Box \;=\; \text{d'Alembert-Operator bzw. „Box"}}\phi = 4\pi\rho , \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} . \end{cases}}$$

* Die Coulomb-Eichung aus Seite 17, $\nabla\cdot\vec{A}=0$, würde zu

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = -4\pi\rho \\ \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} \end{cases}$$

führen. Für den Fall $\rho = 0 \Rightarrow \phi = 0$ ist dies wieder gut geeignet.

Die Lorenz-Eichung fixiert die Eichung nicht vollständig:

$$\begin{cases} \phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \\ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\dot{\phi}' + \nabla\cdot\vec{A}' = \frac{1}{c}\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\chi .$$

Im Gegensatz zur Laplace-Gleichung (vgl. Seite 10) gibt es überall endliche nichttriviale Lösungen zur Bedingung $\boxed{\Box\chi = 0}$, z.B. $\chi = f(z-ct)$, mit einer beliebigen Funktion f:

$$\Box f = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f = \left(\frac{1}{c^2}c^2 - 1\right)f'' = 0 .$$

Die physikalische Bedeutung dieser Tatsache wird im Kapitel 4.2 erläutert.

Alternativer Weg:

Wie auf Seite 18, kann das Problem im Prinzip auch ohne Potentiale behandelt werden, obwohl die Rechnungen dann ein wenig mühsamer sind:

* (M II): $\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

∇× auf beiden Seiten

$$\Rightarrow \quad \nabla\times(\nabla\times\vec{B}) - \frac{1}{c}\nabla\times\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\nabla\times\vec{j}$$

Seite 18: $\nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B}$, $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ (M IV)

(M III): $\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$ $\Rightarrow$ $\nabla\times\dot{\vec{E}} = -\frac{1}{c}\ddot{\vec{B}}$ (∂_t auf beiden Seiten)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Box\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\nabla\times\vec{j}} \, .$$

* (M III): $\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = \vec{0}$

∇× auf beiden Seiten

$$\Rightarrow \quad \nabla\times(\nabla\times\vec{E}) + \frac{1}{c}\nabla\times\dot{\vec{B}} = \vec{0}$$

$\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$, $\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ (M I)

(M II): $\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ $\Rightarrow$ $\nabla\times\dot{\vec{B}} = \frac{1}{c}\ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c}\dot{\vec{j}}$ (∂_t auf beiden Seiten)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Box\vec{E} = -4\pi\left(\nabla\rho + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{j}}\right)} \, .$$

Wenn wir insbesondere den Vakuumlimes betrachten, d.h. $\rho = \vec{j} = 0$, erhalten die Wellengleichungen eine einfache symmetrische Form:*

$$\boxed{\begin{cases} \Box\vec{B} = \vec{0} \\ \Box\vec{E} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{(im Vakuum)}}$$

Wie schon auf Seite 27 erwähnt, gibt es nichttriviale endliche Lösungen zu diesen Gleichungen, genannt elektromagnetische Wellen (Kap. 4.2).

* Die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen im Vakuum, d.h.

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \, , \\ \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = 0 \, , \\ \nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \, , \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \, , \end{cases}$$

weisen auch eine Symmetrie auf, und zwar $\vec{E}\to\vec{B}$, $\vec{B}\to-\vec{E}$. Diese Invarianz wird „Dualität" genannt.