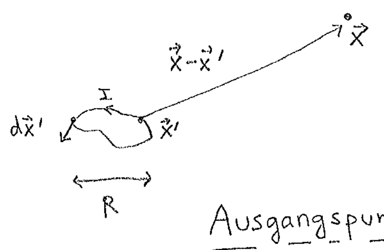
3.2 Multipolentwicklung, magnetischer Dipol [TF 15]



Wir betrachten eine Fragestellung wie auf Seite 13 aber jetzt für das Vektorpotential: wenn Ströme innerhalb eines Radius R lokalisiert sind, wie sieht $\vec{A}(\vec{x})$ bei Abständen $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg R$ aus?

Ausgangspunkt:

* Seite 17: $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$.

* Seite 13: $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$, $r := |\vec{x}|$.

1. Term

Intuitiv würden wir erwarten, dass es wegen $\nabla\cdot\vec{j}=0$ keine Quellen gibt und die Stromlinien geschlossen sind, so dass der Mittelwert von $\vec{j}$ gleich null sein muss. Dies gilt es jetzt, auch mathematisch zu zeigen.

Wir nehmen an, dass $\vec{j}\neq\vec{0}$ nur in einem endlichen Volumen sein kann, und wählen V gross genug, so dass $\vec{j}(\vec{x}')\big|_{\vec{x}'\in\partial V} = \vec{0}$ gilt.

Sei $g(\vec{x}')$ vorerst eine beliebige Funktion.

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{j}(\vec{x}')\, g(\vec{x}')$$

Gaußscher Satz

$$= \int_V d^3\vec{x}'\, \nabla\cdot\left[\vec{j}(\vec{x}')\, g(\vec{x}')\right]$$

$$= \int_V d^3\vec{x}' \left[(\nabla\cdot\vec{j})\, g + \vec{j}\cdot\nabla g\right]$$

$\nabla\cdot\vec{j}=0$ wegen Kontinuitätsgleichung, vgl. Seite 17

$$= \int_V d^3\vec{x}'\, \vec{j}\cdot\nabla g \,. \qquad (*)$$

Wähle jetzt $g(\vec{x}') := x'^1 \Rightarrow \int_V d^3\vec{x}'\, j^1 = 0$.

Und ähnlich: $\int_V d^3\vec{x}'\, j^2 = \int_V d^3\vec{x}'\, j^3 = 0$.

Dabei erhalten wir für den ersten Term aus der Multipolentwicklung

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{cr}\underbrace{\int_V d^3\vec{x}'\, \vec{j}(\vec{x}')}_{\vec{0}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

d.h. „es gibt keine magnetischen Monopole".

2. Term

Um weiter zu kommen, wählen wir $g(\vec{x}') := x^{k'} x^{\ell'}$ in der Gleichung (*) auf Seite 21. Dann ist

$$\vec{j}\cdot\nabla g(\vec{x}') = j^i \partial'_i x^{k'} x^{\ell'}$$

$$= j^i\left(\delta_{ik}\, x^{\ell'} + \delta_{i\ell}\, x^{k'}\right) = j^k x^{\ell'} + j^\ell x^{k'}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x}' \left[j^k(\vec{x}')\, x^{\ell'} + j^\ell(\vec{x}')\, x^{k'} \right] = 0 \quad \forall\, k,\ell .$$

Der zweite Term der Multipolentwicklung beträgt dann

$$\vec{A}(\vec{x}) \supset \frac{1}{cr^3}\, x^\ell \int_V d^3\vec{x}'\, \vec{e}_k\, j^k x^{\ell'}$$

$$= \frac{x^\ell \vec{e}_k}{2cr^3} \int_V d^3\vec{x}' \left\{ \underbrace{j^k x^{\ell'} + j^\ell x^{k'}}_{\text{Verschwindet nach Integration!}} + j^k x^{\ell'} - j^\ell x^{k'} \right\} .$$

Im übrig bleibenden Term schreiben wir

$$j^k x^{\ell'} - j^\ell x^{k'} = \left(\delta_{km}\delta_{\ell n} - \delta_{\ell m}\delta_{kn}\right) j^m x^{n'}$$

$$\stackrel{!}{=} \varepsilon_{ik\ell}\,\varepsilon_{imn}\, j^m x^{n'} .$$

Ein magnetisches Dipolmoment, $\vec{\mu}$, wird definiert:

$$\vec{\mu} := \frac{1}{2c} \int_V d^3\vec{x}'\; \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \;;$$

$$\mu^i = -\frac{1}{2c} \int_V d^3\vec{x}'\; \varepsilon_{imn}\, j^m x^{n'} .$$

Der zweite Term hat damit die Form*

$$\vec{A}(\vec{x}) \supset -\frac{x^\ell \vec{e}_k}{r^3}\, \varepsilon_{ik\ell}\, \mu^i = \boxed{\frac{\vec{\mu}\times\vec{x}}{r^3}} .$$

Für die entsprechende magnetische Induktion erhalten wir**

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \vec{e}_k\, \varepsilon_{kij}\, \partial_i \frac{\varepsilon_{jmn}\,\mu^m x^n}{r^3}$$

$$= \vec{e}_k \left(\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}\right) \mu^m\, \partial_i \left(\frac{x^n}{r^3}\right)$$

$$= \vec{e}_k \left(\mu^k \delta_{in} - \mu^i \delta_{kn}\right) \left(\frac{\delta_{in}}{r^3} - \frac{3x^n x^i}{r^5}\right)$$

$$= \cancel{3\frac{\vec{\mu}}{r^3}} - \cancel{\frac{3\vec{\mu}\, r^2}{r^5}} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} + 3\,\frac{\vec{x}\;\vec{\mu}\cdot\vec{x}}{r^5}$$

$$= \frac{3\vec{x}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x}) - \vec{\mu}\, r^2}{r^5}$$

* Vergleiche mit Dipolterm im Skalarpotential aus Seite 13:

$$\phi \supset \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r^3} .$$

** Vergleiche mit Dipolterm im elektrischen Feld:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

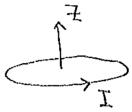
$$= -\vec{e}_k\, \partial_k \frac{x^\ell p^\ell}{r^3}$$

$$= -\vec{e}_k\, p^\ell \left(\frac{\delta_{k\ell}}{r^3} - \frac{3x^\ell x^k}{r^5}\right)$$

$$= -\frac{\vec{p}}{r^3} + 3\,\frac{\vec{x}\;\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^5}$$

$$= \frac{3\vec{x}\,(\vec{p}\cdot\vec{x}) - \vec{p}\, r^2}{r^5}$$

Beispiel:

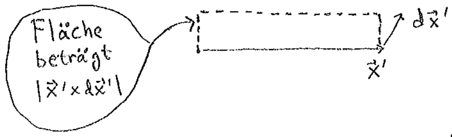


Bestimmen wir das magnetische Dipolmoment für den Ringstrom aus Seite 19.

Für einen dünnen Draht: $\int d^3x'\, \vec{j}(\vec{x}') = \Delta I\, d\vec{x}'$.

$$\Rightarrow \quad \vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V d^3x'\, \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') = \frac{\Delta I}{2c} \oint \vec{x}' \times d\vec{x}' .$$

Geometrische Interpretation:



Dividiert man durch 2, erhält man ein vom Leiter aufgespanntes Flächenelement: $d\vec{f} = \frac{1}{2}\, \vec{x}' \times d\vec{x}'$.

Insgesamt erhalten wir

$$\vec{\mu} = \frac{\Delta I}{c}\, \vec{f} = \frac{\Delta I}{c} \cdot \pi R^2 \cdot \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} \overset{\text{Seite 22}}{=} \frac{3\vec{x}(\vec{\mu}\cdot\vec{x}) - \vec{\mu} r^2}{r^5} = \frac{\Delta I\, \pi R^2}{c} \cdot \frac{3(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)z - (\rho^2+z^2)\vec{e}_z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

Wenn wir $\rho \to 0$ setzen und z gross machen, ist der führende Term

$$\vec{B} = \frac{\Delta I\, \pi R^2}{c} \cdot \frac{3\vec{e}_z - \vec{e}_z}{z^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right),$$

im Einklang mit der exakten Antwort auf Seite 19.

Zusammenhang:

Sei $\vec{j}$ erzeugt durch Punktladungen q_a mit $\vec{v}_a = \dot{\vec{x}}_a$:

$$\vec{j}(\vec{x}) = \sum_a q_a \vec{v}_a\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a).$$

Für das magnetische Dipolmoment erhalten wir

$$\begin{aligned}
\vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int_V d^3x'\, \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \\
&= \frac{1}{2c} \sum_a q_a\, \vec{x}_a \times \vec{v}_a \\
&= \frac{1}{2c} \sum_a \frac{q_a}{m_a}\, \vec{x}_a \times \vec{p}_a = \frac{1}{2c} \sum_a \frac{q_a}{m_a}\, \underbrace{\vec{L}_a}_{\text{Drehimpuls}} .
\end{aligned}$$

Falls alle Ladungsträger identisch sind, gilt

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2cm}\, \vec{L} \quad ; \quad \vec{L} = \text{Gesamtdrehimpuls}.$$

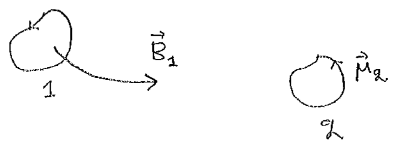
Neben Drehimpuls haben Elementarteilchen auch „Eigendrehimpuls" bzw. Spin, z.B. für Elektronen

$$\vec{\mu}_e = g_e \frac{e}{2cm_e}\, \vec{S} .$$

Der „gyromagnetische Faktor" beträgt aber $g_e \approx 2{,}0023$, nicht 1!

———— ∘ ————

Kraft/Energie:



Wir betrachten die Kraft, die ein magnetisches Dipol 1 (bzw. ein Stromkreis) auf ein anderes Dipol 2 ausübt, wie auf Seite 20:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c} \int_V d^3\vec{x} \; \vec{j}_2(\vec{x}) \times \vec{B}_1(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{c} \vec{e}_k \varepsilon_{kij} \int_V d^3\vec{x} \; j_2^i(\vec{x})\, B_1^j(\vec{x}) \; .$$

Die magnetische Induktion wird Taylor-entwickelt:

$$B_1^j(\vec{x}) = B_1^j(\vec{0}) + \vec{x}\cdot\nabla B_1^j(\vec{0}) + \ldots$$

Wegen $\int_V d^3\vec{x}\, j_2^i(\vec{x}) = 0$ (vgl. Seite 21) gibt der erste Term keinen Beitrag. Aus dem zweiten Term erhalten wir

$$\vec{F}_{12} \supset \vec{e}_k \varepsilon_{kij} \underbrace{\left[\frac{1}{c} \int_V d^3\vec{x}\; j_2^i(\vec{x})\, x^l\right]}_{\boxed{\text{Seite 22: } -\varepsilon_{mil}\mu_2^m}} \partial_l B_1^j(\vec{0})$$

$$= -\vec{e}_k \mu_2^m \left(\delta_{km}\delta_{jl} - \delta_{kl}\delta_{jm}\right) \partial_l B_1^j(\vec{0})$$

$$= -\vec{\mu}_2 \underbrace{\nabla\cdot\vec{B}_1}_{\boxed{0 \text{ laut (M IV)}}} + \nabla(\vec{\mu}_2\cdot\vec{B}_1) \; .$$

$$= \nabla(\vec{\mu}_2\cdot\vec{B}_1) \; .$$

Physikalisch bedeutet dies, das magnetische Dipole im inhomogenen Magnetfeld (wegen ∇) eine Kraft fühlen. Eine berühmte Anwendung ist das Stern-Gerlach-Experiment für die Bestimmung des Elektronspins.

Aus der Kraft kann auch die Wechselwirkungsenergie extrahiert werden:

$$\vec{F}_{12} = -\nabla U_W$$

$$\Rightarrow U_W = -\vec{\mu}_2\cdot\vec{B}_1 \; .$$

Dies hat dieselbe Form als die Wechselwirkungsenergie eines elektrischen Dipols im externen elektrischen Feld, vgl. Seite 15.