# 3. Magnetostatik

Wir erinnern uns aus Seiten 2 und 5 die Grundgleichungen im statischen Limes:

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (\text{M IV})$$
$$\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (\text{M II})$$
$$\nabla\cdot\vec{j} = 0 \qquad (\text{Kontinuitätsgleichung mit } \dot{\rho}=0)$$

## 3.1 Vektorpotential, Kraft zwischen Stromkreisen [TF 13,14]

$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$

Nehme an: $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, $\vec{A} =:$ Vektorpotential.

Denn: $\nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \partial_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j A^k = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisymmetrisch}}\underbrace{\partial_i\partial_j}_{\text{symmetrisch}} A^k = 0.$

Ein Vektorpotential ist aber nicht eindeutig:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi, \qquad \chi \text{ beliebig}$$
$$\Rightarrow \vec{B}' = \vec{B} + \underbrace{\nabla\times\nabla\chi}_{\vec{e}_k\,\varepsilon_{kij}\,\partial_i\partial_j\chi = 0} = \vec{B}.$$

Allerdings, unter bestimmten Annahmen über die Topologie des Raums (z.B. $\mathbb{R}^3$), kann ein $\vec{A}$ konstruiert werden (vgl. unten).

$\boxed{\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$

Schreibe $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{B} &= \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) \\ &= \vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l A^m \\ &= \vec{e}_i\,(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\partial_l A^m \\ &= \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}.\end{aligned}$$

Ein eindeutiges $\vec{A}$ folgt durch eine zusätzliche Bedingung,

$$\nabla\cdot\vec{A} := 0 \qquad \text{„Coulomb-Eichung"}.$$

Es folgt $\nabla\cdot\vec{A}' = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla^2\chi = \nabla^2\chi$. Laut Seite 10 gibt es im $\mathbb{R}^3$ kein nichttriviales endliches $\chi$ mit $\nabla^2\chi = 0$, d.h. $\chi = 0$, d.h. Freiheit wurde entfernt!

Die Maxwell-Gleichung erhält dann die Form

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Also erfüllt jede Vektorkomponente die Poisson-Gleichung! Die Lösung kennen wir aus Seite 10:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}'\,\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}.$$

**Alternativer Weg:** Wir können nach $\vec{B}$ auch ohne $\vec{A}$ lösen!
Nehme rot auf beiden Seiten von $\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \frac{4\pi}{c}\,\nabla\times\vec{j}$$

Seite 17: $\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}}_{0\ (\mathrm{M\,IV})}) - \nabla^2\vec{B}$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\vec{B} = -\frac{4\pi}{c}\,\nabla\times\vec{j} \qquad \text{Poisson!}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\nabla'\times\vec{j}(\vec{x}') \,.$$

Wie auf Seite 10

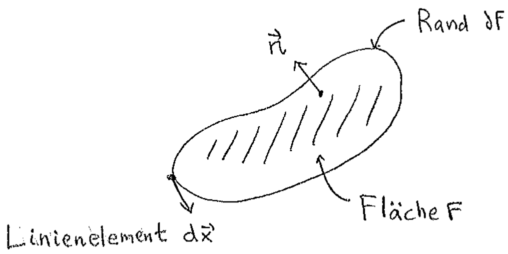
Folglich führen wir eine partielle Integration durch, mit der Annahme, dass $\vec{j}$ auf $\partial V$ verschwindet:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{1}{c}\,\vec{e}_i\int_V d^3\vec{x}'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\varepsilon_{ijk}\,\partial'_j\, j^k(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{c}\,\vec{e}_i\int_V d^3\vec{x}'\left(\partial'_j\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\varepsilon_{ijk}\, j^k(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{c}\,\vec{e}_i\int_V d^3\vec{x}'\,\frac{x^j-x^{j\prime}}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,\varepsilon_{ijk}\, j^k(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}'\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\times\vec{j}(\vec{x}') \,.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist als Biot-Savartsches Gesetz bekannt.
Jetzt können wir mit Seite 17 vergleichen:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \nabla\times\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}'\,\nabla\times\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= \frac{1}{c}\,\vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\int_V d^3\vec{x}'\left(\partial_j\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) j^k(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{c}\,\vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\int_V d^3\vec{x}'\,\frac{x^j-x^{j\prime}}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, j^k(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}'\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\times\vec{j}(\vec{x}') \qquad \text{ok!}
\end{aligned}$$

**Andere Ansätze:** Biot-Savart ist gut geeignet für den Fall von Ringströmen und geraden Magnetfeldern.
Für Ringfelder und gerade Ströme liegt es nahe, stattdessen das Ampèresche Gesetz zu benutzen.

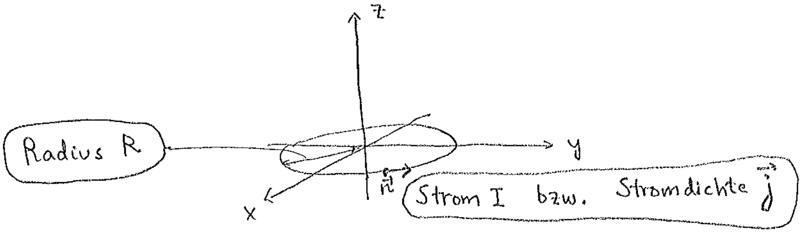



Sei $I = \int_F d\vec{f}\cdot\vec{j}$ der Strom durch F (vgl. Seite 2).
Aus $\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{c}\, I &= \int_F d\vec{f}\cdot\nabla\times\vec{B} \\
&= \int_{\partial F} d\vec{x}\cdot\vec{B}
\end{aligned}$$

Stokesscher Satz

**Beispiel 1:** Betrachtet wird ein Ringstrom durch einen dünnen Draht. Gesucht wird $\vec{B}(\vec{x})$ entlang der z-Achse.




Aus Seite 2: $\quad \vec{j} = \vec{n}\,\dfrac{\Delta I}{\Delta f}$

$$\Rightarrow d^3x'\,\vec{j} = \vec{n}\,\frac{\Delta I}{\Delta f}\,\Delta f\,\Delta s = \Delta I\,\vec{n}\,\Delta s =: \Delta I\, d\vec{x}',$$

wobei $d\vec{x}'$ ein Linienelement entlang der Kurve bezeichnet. Aus Biot-Savart folgt dann

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\Delta I}{c}\int_{\text{Draht}} \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \times d\vec{x}'$$

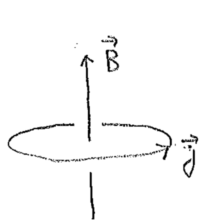
$$= -\frac{\Delta I}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \times \frac{d\vec{x}'}{d\varphi}\,.$$

Hier sind: $\quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dfrac{d\vec{x}'}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix};$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{x}-\vec{x}' = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix};$$

$$(\vec{x}-\vec{x}') \times \frac{d\vec{x}'}{d\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -R\cos\varphi & -R\sin\varphi & z \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} -zR\cos\varphi \\ -zR\sin\varphi \\ -R^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\Delta I}{c}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(R^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} zR\cos\varphi \\ zR\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix}$$




$$= \frac{\Delta I}{c}\cdot\frac{2\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

—— · ——

**Beispiel 2:** Betrachtet werden zwei Stromkreise.
Welche Kraft übt Stromkreis 1 auf Stromkreis 2?


Aus Seite 3: $\vec{f}_L = \frac{1}{c}\,\vec{j}_2 \times \vec{B}_1$.

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \int_V d^3\vec{x}\, \vec{f}_L = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\; \vec{j}_2(\vec{x}) \times \vec{B}_1(\vec{x})$$

Biot-Savart aus Seite 18, mit $\nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$

$$= \frac{1}{c^2}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{x}'\; \vec{j}_2(\vec{x}) \times \left[\nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \times \vec{j}_1(\vec{x}')\right].$$

Benutze Identität $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ aus Übungsblatt 1

$$= \frac{1}{c^2}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{x}'\; \Big\{ \vec{j}_1(\vec{x}')\cdot\vec{j}_2(\vec{x})\; \nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \vec{j}_1(\vec{x}')\; \underbrace{\vec{j}_2(\vec{x})\cdot\nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{} \Big\}$$

$$j_2^i\, \partial_i \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \partial_i\left(\frac{j_2^i}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{\nabla\cdot\vec{j}_2}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Die beiden Beiträge aus dem zweiten Term verschwinden: laut dem Gaußschen Satz ergibt $\int_V d^3\vec{x}\; \nabla\cdot\left(\frac{\vec{j}_2(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$ ein Oberflächenintegral, während $\nabla\cdot\vec{j}_2 = 0$ wegen Kontinuitätsgleichung (vgl. Seite 17).
Übrig bleibt das einfache Ergebnis

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2}\int_V d^3\vec{x}\int_V d^3\vec{x}'\; \vec{j}_1(\vec{x}')\cdot\vec{j}_2(\vec{x})\; \nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

für dünne Drähte wie auf Seite 19

$$= \frac{I_1 I_2}{c^2} \iint d\vec{x}'\cdot d\vec{x}\;\; \nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$