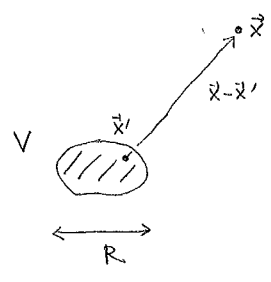


2.3 Multipolentwicklung [TF 11, 12]



Wir betrachten wieder ein System, in dem die Ladungsdichte lokalisiert ist. Wie sieht das Skalarpotential bei $|\vec{x} - \vec{x}'| \gg R$ aus?

Die allgemeine Antwort (Seiten 6, 10): $\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$.

Für $|\vec{x}'| \leq R$, $|\vec{x}| \gg R$ können wir das Ergebnis durch eine Taylor-Entwicklung in \vec{x}' vereinfachen!

Zur Notation: die i -Komponente von \vec{x}' wird entweder mit x^i oder mit x'^i bezeichnet.

$r := |\vec{x}|$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} - \sum_i x'^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{ij} x'^i x'^j \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{r} + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^i}{r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ -\frac{x^i}{r^3} \right\} = -\frac{\delta^{ij}}{r^3} - 3x^i \left(-\frac{x^j}{r^5} \right)$$

Setzen wir die Terme zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{x^i x'^i}{r^3} + \sum_{ij} \frac{3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}}{2r^5} x'^i x'^j + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{x^i}{r^3} x'^i + \sum_{ij} \frac{3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}}{2r^5} (x'^i x'^j - \frac{\delta^{ij} |\vec{x}'|^2}{3}) + \dots \end{aligned}$$

$$\sum_{ij} \delta^{ij} (3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}) = 0$$

Damit wird das Skalarpotential zum

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{P}}{r^3} + \sum_{ij} \frac{3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}}{2r^5} Q^{ij} + o\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

wobei wir kartesische Multipolmomente definiert haben:

$Q := \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') =$ die Gesamtladung („Monopol“)

$\vec{P} := \int_V d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}') =$ das elektrische Dipolmoment

$Q^{ij} := \int_V d^3x' \left(x'^i x'^j - \frac{\delta^{ij} |\vec{x}'|^2}{3} \right) \rho(\vec{x}') =$ der Quadrupoltensor

Es ist zu bemerken, dass Q^{ij} spurlos ist: $\sum_i Q^{ii} = 0$.

Beispiele:

(i) eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho = \rho(|\vec{x}'|)$

* $Q \neq 0$

* $\vec{P} = \int d^3\vec{x}' \vec{x}' \rho(|\vec{x}'|) = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x}' [\vec{x}' \rho(|\vec{x}'|) + \vec{x}' \rho(|\vec{x}'|)]$

Substituiere $\vec{x}' \rightarrow -\vec{x}'$ im zweiten Term $\Rightarrow \vec{0}$.

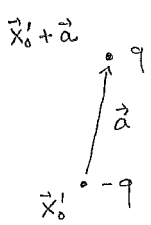
* $Q^{i \neq j} = \int d^3\vec{x}' x^i x^j \rho(|\vec{x}'|) = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x}' x^i [x^j \rho(|\vec{x}'|) + x^j \rho(|\vec{x}'|)]$

Substituiere $x^j \rightarrow -x^j$ im zweiten Term $\Rightarrow 0$.

Es folgt, dass Q^{ij} diagonal ist (vgl. Trägheitstensor im Hauptachsensystem).

Aus Symmetriegründen gilt $Q^{11} = Q^{22} = Q^{33}$.

Aber $\text{Spur} = Q^{11} + Q^{22} + Q^{33} = 0 \Rightarrow Q^{ij} = 0!$



(ii) $\rho(\vec{x}') = q [\delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}'_0 - \vec{a}) - \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}'_0)]$

* $Q = 0$

* $\vec{P} = \int d^3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') = q [\vec{x}'_0 + \vec{a} - \vec{x}'_0] = q \vec{a}$

(iii) $\rho(\vec{x}') = q [\delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}'_0 - 2\vec{a}) + \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}'_0) - 2\delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}'_0 - \vec{a})]$

* $Q = q + q - 2q = 0$

* $\vec{P} = q [\vec{x}'_0 + 2\vec{a} + \vec{x}'_0 - 2(\vec{x}'_0 + \vec{a})] = \vec{0}$

* Q^{ij} ist diagonal aus Symmetriegründen.

$Q^{11} = Q^{22}$ aus Symmetriegründen.

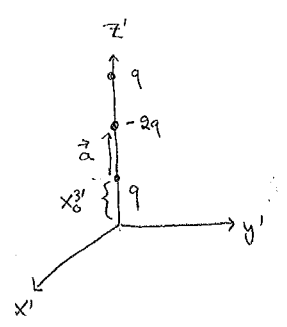
$Q^{11} + Q^{22} + Q^{33} = 0 \Rightarrow Q^{11} = Q^{22} = -\frac{1}{2} Q^{33}$

$$Q^{33} = \int d^3\vec{x}' [(x^3)^2 - \frac{|\vec{x}'|^2}{3}] \rho(\vec{x}')$$

$$= \int d^3\vec{x}' \left[\frac{2(z')^2}{3} - \frac{(x')^2 + (y')^2}{3} \right] \rho(\vec{x}')$$

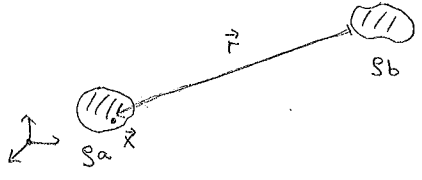
$$= \frac{2}{3} q [(x^3_0 + 2a)^2 + (x^3_0)^2 - 2(x^3_0 + a)^2]$$

$$= \frac{4}{3} q a^2 \neq 0$$



Wechselwirkung:

Wir betrachten zwei räumlich separierte Ladungsverteilungen. Wieviel Energie trägt das System?



Aus Seite 7:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x [\rho_a(\vec{x}) + \rho_b(\vec{x})] [\phi_a(\vec{x}) + \phi_b(\vec{x})]$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x [\rho_a \phi_a + \rho_b \phi_b + \rho_a \phi_b + \rho_b \phi_a]$$

"Selbstenergie" vom System a
"Selbstenergie" vom System b
"Wechselwirkungspotential" =: U_w

Es kann gezeigt werden, dass die letzten zwei Terme gleich sind:

$$\int d^3x \rho_b(\vec{x}) \phi_a(\vec{x}) \stackrel{\text{Poisson}}{=} -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \nabla^2 \phi_b(\vec{x}) \phi_a(\vec{x})$$

$$\stackrel{\substack{\nabla^2 \phi_b \phi_a - \phi_b \nabla^2 \phi_a = \nabla \cdot (\nabla \phi_b \phi_a - \phi_b \nabla \phi_a) \\ + \text{Gaußscher Satz} + R \rightarrow \infty \text{ wie auf Seite 8}}}{=} -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \phi_b(\vec{x}) \nabla^2 \phi_a(\vec{x})$$

$$\stackrel{\text{Poisson}}{=} \int d^3x \rho_a(\vec{x}) \phi_b(\vec{x})$$

Letztendlich machen wir noch eine Taylor-Entwicklung:

$$\phi_b(\vec{x}) = \phi_b(\vec{0}) + \vec{x} \cdot \nabla \phi_b(\vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} x^i x^j \partial_i \partial_j \phi_b(\vec{0}) + \dots$$

$$= \phi_b(\vec{0}) - \vec{x} \cdot \vec{E}_b(\vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} (x^i x^j - \frac{\delta^{ij} |\vec{x}|^2}{3}) \partial_i \partial_j \phi_b(\vec{0}) + \frac{|\vec{x}|^2}{6} \nabla^2 \phi_b(\vec{0}) + \dots$$

verschwindet laut Poisson, weil ρ_b anderswo lokalisiert ist!

Und dann integrieren wir über \vec{x} , wobei Multipolmomente der Verteilung ρ_a identifiziert werden können:

$$\Rightarrow U_w = Q_a \phi_b(\vec{0}) - \vec{P}_a \cdot \vec{E}_b(\vec{0}) - \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_a^{ij} \partial_i \partial_j \phi_b(\vec{0}) + \dots$$

Beispiel:

Seien ρ_a, ρ_b "reine Dipole", d.h. $Q_a = Q_b = 0$.

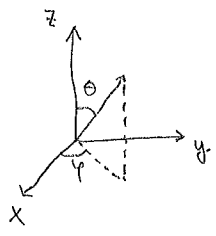
Aus Seite 13: $\phi_b = \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}_b}{r^3} + O(\frac{1}{r^3})$

$$\Rightarrow \vec{E}_b = -\nabla \phi_b = -\frac{\vec{P}_b}{r^3} + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}_b}{r^5} \vec{r} + O(\frac{1}{r^4})$$

$$\Rightarrow U_w = -\vec{P}_a \cdot \vec{E}_b + O(\frac{1}{r^4})$$

$$\stackrel{\substack{\vec{n} := \frac{\vec{r}}{r}}}{=}} \frac{\vec{P}_a \cdot \vec{P}_b - 3 \vec{n} \cdot \vec{P}_a \vec{n} \cdot \vec{P}_b}{r^3} + O(\frac{1}{r^4})$$

"Dipolwechselwirkung"



Kugelkoordinaten: Auf Seite 13 haben wir "kartesische Multipolmomente" definiert. Es ist aber auch möglich, die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten zu formulieren. Hier werden die Hauptergebnisse ohne Herleitung gegeben.

Kugelflächenfunktionen: $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, mit $l=0, 1, \dots$ und $m=-l, \dots, l$ bilden eine vollständige Menge von orthonormierten Funktionen.

Vollständigkeit: Jede (differenzierbare usw.) Funktion $f(\theta, \varphi)$ lässt sich als konvergente Summe darstellen,
$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Orthonormalität:
$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\Leftrightarrow a_{lm} = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi).$$

Beispiele:
 $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} ; Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta ; Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$
 $Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) ; \dots$
 $l=0$: Monopol, $l=1$: Dipol, $l=2$: Quadrupol, ...

Wunderformel:
$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

wobei $r_{<} := \min(r, r')$ und $r_{>} := \max(r, r')$.

Multipolentwicklung: Einsatz von Wunderformel in
$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \text{ mit } |\vec{x}| \gg \max_{\vec{x}' \in V} |\vec{x}'|$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}},$$

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3x' (r')^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}').$$