2. Elektrostatik

Wir betrachten zuerst den statischen Limes, d.h. keine Zeitabhängigkeit ($\partial_t = 0$).
Die Maxwell-Gleichungen zerfallen in zwei Gruppen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad , \qquad \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \qquad (\mathrm{M\,I}) + (\mathrm{M\,III}) \Rightarrow \underline{\text{Elektrostatik}} .$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad , \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (\mathrm{M\,II}) + (\mathrm{M\,IV}) \Rightarrow \underline{\text{Magnetostatik}} .$$

In diesem Kapitel wird die erste Gruppe behandelt.

2.1 Skalarpotential, Coulomb-Kraft, Feldenergie [TF 6]

$\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$

Mechanik I / Seite 8: für „einfach zusammenhängende" Gebiete folgt

$$\vec{E} = -\nabla\phi .$$

Hier kann das <u>elektrische Potential</u> bzw. <u>Skalarpotential</u> ϕ als

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{x}' \cdot \vec{E}(\vec{x}')$$

ausgedrückt werden, wobei das Integral unabhängig vom Integrationsweg ist.

$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho}$

Wir können jetzt nach ϕ oder direkt nach $\vec{E}$ lösen:

(i) Einsatz von $\vec{E} = -\nabla\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho} \qquad \underline{\text{Poisson-Gleichung}} .$$

Für den Spezialfall des Vakuums ($\rho = 0$) erhalten wir

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0} \qquad \underline{\text{Laplace-Gleichung}}^* .$$

*Lösungen der Laplace-Gleichung werden <u>harmonische Funktionen</u> genannt, und spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle.

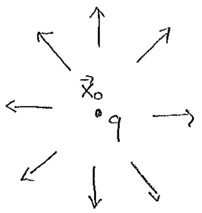
(ii) Betrachte den <u>elektrischen Fluss</u> durch eine Oberfläche ∂V:

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} \overset{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_V d^3\vec{x}\; \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\overset{(\mathrm{M\,I})}{=} 4\pi \int_V d^3\vec{x}\; \rho$$

$$= 4\pi \underbrace{Q_V}_{\text{Gesamtladung innerhalb von } V} \qquad \underline{\text{Gaußsches Gesetz}}$$

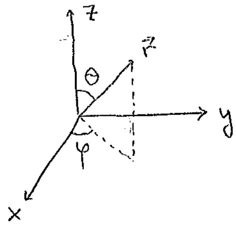
Elektrisches Feld und Skalarpotential einer Punktladung



Aus Symmetriegründen: $\vec{E}(\vec{x}) =: E(r)\frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r} := \vec{x} - \vec{x}_0$.

Wähle V als Kugel mit Radius r um den Punkt $\vec{x}_0$.

Benutze das Gaußsche Gesetz:



$$4\pi q = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, r^2 \frac{\vec{r}}{r}\cdot E(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Kugelkoordinaten

$$= 4\pi r^2 E(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{q}{r^2}} .$$

Das entsprechende Skalarpotential lautet $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{r}$,
denn in Kugelkoordinaten gilt

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} ,$$

und folglich erhalten wir

$$-\nabla\frac{q}{r} = -q\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{q}{r^2}\vec{e}_r = \frac{q\vec{r}}{r^3} \quad \square .$$

Elektrisches Feld und Skalarpotential von vielen Punktladungen

Maxwell-Gleichungen sind linear in Feldern und Ladungen.
Folglich gilt Superpositionsprinzip: sind $\rho_1, \vec{E}_1, \phi_1$ und $\rho_2, \vec{E}_2, \phi_2$ Lösungen, dann sind $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $\phi_1 + \phi_2$ Lösungen für die Ladungsdichte $\rho_1 + \rho_2$.

Wenn wir also Punktladungen q_a an Orten $\vec{x}_a$ haben, dann gilt

$$\phi(\vec{x}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{x}-\vec{x}_a|} ,$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_a \frac{q_a(\vec{x}-\vec{x}_a)}{|\vec{x}-\vec{x}_a|^3} .$$

Im Kontinuumlimes (vgl. Seite 1) wird daraus

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} ,$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} ,$$

wo wir vorsichtshalber $\vec{x}$ ausserhalb des Volumens V wählen sollten.

*Geschichtlich gesehen war dies der Ausgangspunkt, für uns aber eine abgeleitete Grösse.

Coulomb-Kraft*

Gemäss Lorentz-Kraft (vgl. Seite 3) im statischen Limes ($\vec{v}=\vec{0}$) ist Kraft auf Ladung q_a am Ort $\vec{x}_a$

$$\vec{F}_a(\vec{x}_a) = q_a \vec{E}_a(\vec{x}_a),$$

wobei $\vec{E}_a$ das von q_a selbst erzeugte Feld nicht enthält:

$$\vec{E}_a(\vec{x}_a) \overset{\text{Seite 6}}{=} \sum_{b\neq a} \frac{q_b(\vec{x}_a-\vec{x}_b)}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|^3} = -\nabla_a \phi_a(\vec{x}_a) \qquad \nabla_a := \nabla_{\vec{x}_a}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_a(\vec{x}_a) = \sum_{b\neq a} q_a q_b \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_b}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|^3} \qquad \underline{\text{Coulomb-Kraft}}.$$

Diese Kraft ist konservativ (weil $\nabla_a \times \vec{E}_a = \vec{0}$ gilt), und kann deshalb als

$$\vec{F}_a(\vec{x}_a) = -\nabla_a U$$

ausgedrückt werden, wobei U die Potentialenergie bezeichnet.

Behauptung: Für U gilt

$$U = \frac{1}{2}\sum_a q_a \phi_a(\vec{x}_a) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\ a\neq b}} \frac{q_a q_b}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|}. \qquad (*)$$

Beweis: Ableiten, und aufpassen mit den Indizen:

$$-\nabla_a U = -\nabla_a \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\\ c\neq d}} \frac{q_c q_d}{|\vec{x}_c-\vec{x}_d|}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\\ c\neq d}} q_c q_d \underbrace{\nabla_a \frac{1}{|\vec{x}_c-\vec{x}_d|}}_{-\delta_{ac}\frac{\vec{x}_c-\vec{x}_d}{|\vec{x}_c-\vec{x}_d|^3} - \delta_{ad}\frac{\vec{x}_d-\vec{x}_c}{|\vec{x}_d-\vec{x}_c|^3}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{d\neq a} q_a q_d \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_d}{|\vec{x}_a-\vec{x}_d|^3} + \frac{1}{2}\sum_{c\neq a} q_a q_c \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_c}{|\vec{x}_a-\vec{x}_c|^3}$$

$$\overset{\text{Umnenne } \{c\to b,\ d\to b\}}{=} \sum_{b\neq a} q_a q_b \frac{\vec{x}_a-\vec{x}_b}{|\vec{x}_a-\vec{x}_b|^3} \qquad \square.$$

Kontinuumlimes: Mit einer kontinuierlichen Ladungsdichte ergibt der erste Teil von Gleichung (*)

$$U = \frac{1}{2}\int_V d^3\vec{x}\; \rho(\vec{x})\,\phi(\vec{x}).$$

Feldenergie: Wir wollen ϕ und ρ aus $U = \frac{1}{2}\int_V d^3\vec{x}\, \rho(\vec{x})\phi(\vec{x})$ zugunsten des elektrischen Feldes $\vec{E}$ eliminieren:

Als V nehmen wir vorerst eine grosse Kugel mit Radius R, und schicken am Ende $R \to \infty$.

$$\Rightarrow \quad U \overset{(MI)}{=} \frac{1}{2} \int_{|\vec{x}|\leq R} d^3\vec{x}\, \frac{\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})}{4\pi}\, \phi(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{|\vec{x}|\leq R} d^3\vec{x}\, \left[\nabla\cdot(\vec{E}\phi) - \vec{E}\cdot\nabla\phi\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left[\int_{|\vec{x}|=R} d\vec{f}\cdot(\vec{E}\phi) + \int_{|\vec{x}|\leq R} d^3\vec{x}\, \vec{E}^2\right].$$

$$(\nabla\cdot\vec{E})\phi = \partial_i E^i \phi = \partial_i(E^i\phi) - E^i\partial_i\phi = \nabla\cdot(\vec{E}\phi) - \vec{E}\cdot\nabla\phi$$

Gaußscher Satz im ersten Term; $\vec{E} = -\nabla\phi$ im zweiten Term

Wenn Ladungen lokalisiert sind und R gross wird, gilt

$$\phi \propto \frac{1}{R}, \quad |\vec{E}| \propto \frac{1}{R^2}, \quad |d\vec{f}| = R^2 d\Omega .$$

Damit können wir die Grössenordnung des ersten Termes schätzen:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|\vec{x}|=R} d\vec{f}\cdot(\vec{E}\phi) \propto \lim_{R\to\infty} 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{R} = 0 .$$

Übrig bleibt

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int d^3\vec{x}\, \vec{E}^2(\vec{x})} .$$

Interpretation: Die potentielle Energie steckt im elektrischen Feld; die Energiedichte des elektrischen Feldes lautet

$$e(\vec{x}) := \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2(\vec{x}) .$$