Elektrodynamik (M. Laine, ExWi-117)

Organisatorisches:

* Skript: durch ILIAS
* Literatur: T. Fliessbach, Elektrodynamik [„TF"]
* Übungen:
  - durch ILIAS
  - Fragen stellen im Tutorium (ab 2. Woche)
  - Musterlösungen später durch ILIAS
* Ablauf: Vorlesung < Skript < Literatur

  $\downarrow$

  Übungen

  $\downarrow$

  Prüfung
* Prüfung:
  - Di 10.1.2023 13:15 - 15:45 A6
  - Anmeldung durch KSL

1. Einführung [TF 5]

Grundbegriffe: Massenpunkte besitzen eine zweite Eigenschaft neben ihrer Masse: elektrische Ladung. Ladungen erzeugen elektrische und magnetische Felder. Die Felder wirken wiederum auf Ladungen, indem sie Kräfte auf diese ausüben. Es handelt sich also um ein gekoppeltes System von Massenpunkten und Feldern.

Punktladungen: Massenpunkte am $\vec{x}_1, \vec{x}_2$; Massen m_1, m_2; Ladungen q_1, q_2.

Gesamtmasse $M := m_1 + m_2$.

Gesamtladung $Q := q_1 + q_2$.

Ladungsdichte:

ΔV = Volumen um den Punkt $\vec{x}$.

Δq = Ladung im ΔV.

$$\rho(\vec{x}) := \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

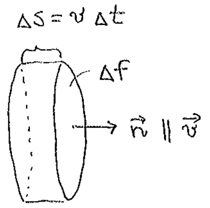
Gesamtladung im Volumen V: $Q = \int_V d^3\vec{x}\, \rho(\vec{x})$.

Für Punktladungen: $\rho(\vec{x}) = \sum_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)$

$$\Rightarrow Q = \sum_a q_a .$$

Stromdichte:

Strom durch Fläche Δf: $\Delta I := \lim\limits_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\Delta q}{\Delta t}}_{\text{Ladung durch } \Delta f \text{ im Zeitintervall } \Delta t}$



Stromdichte:

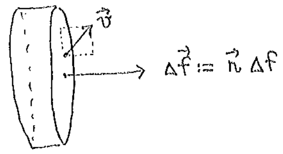
$$\vec{j} := \vec{n} \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta f}$$

$$= \vec{n} \lim_{\Delta f \to 0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta f\, \Delta t}$$

$$= \vec{n} \lim_{\Delta f, \Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\Delta q}{\Delta f\, \Delta s}}_{\rho} \underbrace{\frac{\Delta s}{\Delta t}}_{v}$$

$$= \rho\, \vec{n}\, v = \rho \vec{v}\,.$$

Falls die geladenen Teilchen sich <u>nicht</u> senkrecht auf das Flächenelement bewegen, wird der Strom durch die senkrechte Komponente gegeben:

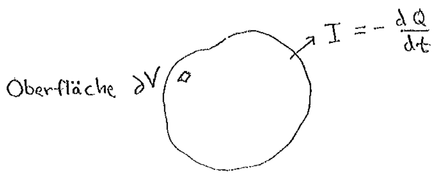


$$\Delta I = \vec{j} \cdot \vec{n}\, \Delta f = \vec{j} \cdot \Delta \vec{f}\,.$$

Kontinuitätsgleichung:

Die Ladung im Volumen V kann sich nur dadurch ändern, dass Ladung durch die Oberfläche ∂V hinein- oder hinausfliesst.

Gesamtstrom durch Fläche F: $I = \int_F dI = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}\,.$



Ladung innerhalb einer abgeschlossenen Fläche wird vermindert:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_V d^3\vec{x}\, \rho}_{Q} = -I = -\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j} \overset{\text{Gaußscher Satz}}{=} -\int_V d^3\vec{x}\, \nabla \cdot \vec{j}$$

$$\Longleftrightarrow \int_V d^3\vec{x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) = 0\,.$$

Dies gilt für ein beliebiges Volumenelement, auch infinitesimal klein.

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x},t) = 0 \quad \forall\, \vec{x}, t.}$$

Die Ladungsdichte ρ ist ein „Skalarfeld", die Stromdichte $\vec{j}$ ein „Vektorfeld".

Maxwell-Gleichungen: Ladungen und Ströme erzeugen das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x},t)$ und die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{x},t)$:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \nabla\cdot\vec{E} &=& 4\pi\varrho & (\mathrm{M\,I}) \\ \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c}\dot{\vec{E}} &=& \frac{4\pi}{c}\vec{j} & (\mathrm{M\,II}) \\ \nabla\times\vec{E}+\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} &=& \vec{0} & (\mathrm{M\,III}) \\ \nabla\cdot\vec{B} &=& 0 & (\mathrm{M\,IV}) \end{array}}$$

Hier ist $c =$ Lichtgeschwindigkeit $:= 299792458\ \frac{m}{s}$.

Bemerkungen:

(i) Spezifische Einheiten wurden benutzt, vgl. Seite 4.

(ii) (MI)-(MIV) werden häufig als „Maxwell-Gleichungen im Vakuum" bezeichnet. Sie gelten jedoch auch in Materie, falls richtig (d.h. wörtlich) interpretiert.

(iii) Crosscheck: $\varrho \overset{(\mathrm{MI})}{=} \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\vec{E}$, $\vec{j} \overset{(\mathrm{MII})}{=} \frac{1}{4\pi}\left(c\nabla\times\vec{B}-\dot{\vec{E}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varrho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j} = \frac{1}{4\pi}\Big\{\cancel{\nabla\cdot\dot{\vec{E}}} + \underbrace{c\,\nabla\cdot\nabla\times\vec{B}}_{} - \cancel{\nabla\cdot\dot{\vec{E}}}\Big\} = 0 .$$

$$\boxed{\partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j + \varepsilon_{\underset{ji}{\cancel{ij}}k}\partial_{\underset{j}{\cancel{i}}}\partial_{\underset{i}{\cancel{j}}}\right)B_k = 0}$$

Symmetrie von $\partial_i\partial_j$ & Antisymmetrie von ε_{ijk}

Lorentz-Kraft: Eine Ladung q am Ort $\vec{x}$ zur Zeit t, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, erfährt die Kraft

$$\boxed{\vec{F}_L(\vec{x},t) = q\left[\vec{E}(\vec{x},t)+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]} .$$

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ enthalten dabei nicht die Beiträge von q selber.

Mit Ladungsdichte $\varrho(\vec{x},t)$ und Stromdichte $\vec{j}(\vec{x},t)$ wird die Kraft durch eine Kraftdichte ersetzt:

$$\boxed{\vec{f}_L(\vec{x},t) := \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{F}_L}{\Delta V} = \varrho(\vec{x},t)\vec{E}(\vec{x},t)+\frac{1}{c}\vec{j}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)} .$$

Die Kraft bewegt wiederum die geladenen Teilchen:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_L + \text{andere Kräfte}.$$

—— o ——

Einheiten:

Es geht um ein leidiges und verwirrendes Thema!

Wir benutzen das Gaußsche bzw. cgs (cm, g, s) System. Dabei werden keine zusätzlichen Einheiten für die Elektrodynamik eingeführt, sondern Ladung wird durch die mechanischen Einheiten cm, g, s definiert.

$$(\mathrm{MI}): \quad \frac{[\vec{E}]}{[\vec{x}]} = \frac{[q]}{[\vec{x}]^3} \Rightarrow [\vec{E}] = \frac{[q]}{[\vec{x}]^2}$$

$$\text{Lorentz:} \quad [\vec{F}] = [m]\frac{[\vec{x}]}{[t]^2} = [q][\vec{E}] \Rightarrow [q]^2 = [m]\frac{[\vec{x}]^3}{[t]^2},$$

$$[\vec{E}] = \frac{[m]^{1/2}}{[\vec{x}]^{1/2}[t]}.$$

Kennzeichne Grössen in einem anderen System mit $*$:

$$\vec{E} = \sqrt{\Psi\varepsilon_0}\,\vec{E}^*, \quad \vec{B} = \sqrt{\frac{\Psi}{\mu_0}}\,\vec{B}^*, \quad q = \frac{1}{\sqrt{\Psi\varepsilon_0}}\,q^*, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\Psi\varepsilon_0}}\,\rho^* .$$

Die Grundgleichungen im anderen System:

$$(\mathrm{MI}): \quad \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E}^* = \frac{4\pi}{\Psi\varepsilon_0}\rho^*$$

$$(\mathrm{MII}): \quad \nabla\times\vec{B} - \frac{\dot{\vec{E}}}{c} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\vec{B}^* - \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{c^2}}\,\dot{\vec{E}}^* = \frac{4\pi}{\Psi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 c^2}}\,\vec{j}^*$$

$$(\mathrm{MIII}): \quad \nabla\times\vec{E} + \frac{\dot{\vec{B}}}{c} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\vec{E}^* + \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 c^2}}\,\dot{\vec{B}}^* = 0$$

$$(\mathrm{MIV}): \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{B}^* = 0$$

$$(\text{Lorentz}): \quad \vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_L = q^*\left(\vec{E}^* + \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 c^2}}\,\vec{v}\times\vec{B}^*\right)$$

Einige Mass-Systeme:

„Dielektrizitätskonstante des Vakuums"

„Permeabilität des Vakuums"

	ε_0	μ_0	Ψ
Gauß	1	1	1
Heaviside-Lorentz	1	1	4π
SI	$\frac{1}{c^2\mu_0}$	$\frac{4\pi}{10^7}\,\frac{N}{A^2}$	4π